ΘΕΩΡΙΑ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. *Τι ονομάζεται συνάρτηση;*

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου *A* αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου *B*.

2. *Έστω συνάρτηση f από το A στο B.*

   a. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

   b. Πότε η f λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής τιμής;

a. Το σύνολο *A*, που λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης,

b. Αν το A είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *B* συμπίπτει με το *R* οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**.

3. *Τι ονομάζουμε **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** f;*

Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

4. Τι λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f***;

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f***.

5. *Αν f, g δυο συναρτήσεις πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ αυτών του αθροίσματος της διαφοράς του γινομένου και του πηλίκου;*

Αν δύο συναρτήσεις *f*, *g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *A*, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

6. *Πότε μια συνάρτηση λέγεται "γνησίως αύξουσα συνάρτηση" και πότε "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση";*

Μια συνάρτηση *f* λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. *Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;*

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* λέμε ότι παρουσιάζει:
Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_2.

Ονομάζουμε **περιοχή** του x_1 είναι ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_1)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $f(x_1)$ **.** Ομοίως για το **ολικό ελάχιστο.**

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

*8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής;***

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *A* λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

*9. Πότε μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;*

Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το <u>όριο</u> αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

10. Τι εκφράζει η παράγωγος της της f στο x_0 ;

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το *x*, όταν $x = x_0$.

- <u>**Ο συντελεστής διεύθυνσης**</u> της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.
- <u>**Η ταχύτητα ενός κινητού**</u> που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $\boxed{\upsilon(t_0) = f'(t_0)}$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$ ενώ
- <u>**η επιτάχυνση του κινητού**</u> είναι $\boxed{\alpha(t_o) = \upsilon'(t_0) = f''(t_0)}$

11. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f;

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το *A*, και *B* το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος της *f* και συμβολίζεται με *f'*.**

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η παράγωγος της f στο x_0 είναι αριθμός (το όριο) ενώ η παράγωγος της f είναι συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε x_o αυτό το όριο.

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$**

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

Άρα $\boxed{(c)' = 0}$.

- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$**

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.

Άρα $\boxed{(x)'=1}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{\rho}$**

14

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h,$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

Άρα $\boxed{(x^2)'=2x}$

Αποδεικνύεται ότι $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός .

Κανόνες Παραγώγισης

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$, και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x).$$

Άρα $\boxed{(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))\\&=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),\end{aligned}$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$. Άρα

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$$

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

***12.** Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου*

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο.
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

2. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Βασικές έννοιες

✓ **Στατιστική** είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:
- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

✓ **Πληθυσμός** (population) είναι ένα σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.
Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού.
☑ **Μεταβλητές** λέγονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \ldots$

✓ **Τιμές της μεταβλητής** λέγονται οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή.
Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται **στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις**.
Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ'ανάγκη διαφορετικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εξετάζουμε την ομάδα αίματος δέκα ατόμων, τα στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις που θα προκύψουν μπορεί να είναι: Α, Α, Β, Α, ΑΒ, Ο, ΑΒ, ΑΒ, ΑΒ, Ο, Β. Οι δυνατές όμως τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή "ομάδα αίματος" είναι οι εξής τέσσερις: Α, Β, ΑΒ και Ο. Ο πληθυσμός είναι το σύνολο των δέκα ατόμων και μεταβλητή είναι η ομάδα αίματος

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος(με τιμές *Α*, *Β*, *ΑΒ*, Ο), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.
2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
   i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,…), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,…,6) κτλ.
   ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β). Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

✓ **Απογραφή**. Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**

✓ **Δείγμα** ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του πληθυσμού. Ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

Στατιστικοί Πίνακες

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

✓ α) **γενικούς πίνακες** οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

✓ β) **ειδικούς πίνακες** οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,

δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ'αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής *X*, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους *ν*, $\kappa \le \nu$.

☑ **Συχνότητα** : Στην τιμή αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής *X* στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Ισχύει : $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa = \nu$

☑ **Σχετική συχνότητα :** Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα με το μέγεθος *ν* του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency) f_i της τιμής , δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \qquad i = 1,2,\ldots,\kappa.$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,\ldots,\kappa$ αφού $0 \le \nu_i \le \nu$.

(ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$, αφού

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i\%$, δηλαδή $f_i\% = 100 f_i$.

☑ **Πίνακας συχνοτήτων:** Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.

☑ **Κατανομή συχνοτήτων:** Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, ν_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

✓ **Αθροιστική συχνότητα Ni** μιας τιμής x_i μιας <u>*ποσοτικής μεταβλητής*</u> X, λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i , δηλαδή $N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i$,για $i = 1,2,...,\kappa$ .. Ισχύει $\nu_\kappa = \mathrm{N}_\kappa - \mathrm{N}_{\kappa-1}$

✓ **Αθροιστική σχετική συχνότητα F**$_i$ μιας τιμής x_i μιας <u>*ποσοτικής μεταβλητής*</u> X, λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i δηλαδή : $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$,για $i = 1,2,...,\kappa$. Ισχύει $\mathrm{f}_\kappa = \mathrm{F}_\kappa - \mathrm{F}_{\kappa-1}$.

Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

☑ Το **ραβδόγραμμα** (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής *X* αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεών τους καθορίζονται αυθαίρετα.

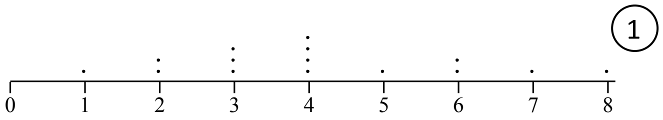
☑ **Διάγραμμα συχνοτήτων** Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων** (line diagram). Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < ... < x_\kappa$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1(α). Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες , οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε, βλέπε σχήμα 1(β).

☑ Το **κυκλικό διάγραμμα** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε

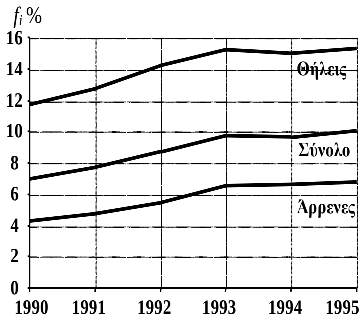
$$\boxed{\alpha_i = v_i \frac{360^o}{v} = 360^o f_i \quad \text{για} \quad i=1,2,...,\kappa\,.}$$

☑ **Σημειόγραμμα:** Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα** (dot diagram), στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα. Στο σχήμα 1 έχουμε το σημειόγραμμα των χρόνων (σε λεπτά) 4,2,3,1,5,6,4,2,3,4,7,4,8,6,3 που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα.



χρόνος (σε λεπτά)

☑ Το **χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής. Στο σχήμα έχουμε το χρονόγραμμα του ποσοστού ανεργίας στη χώρα μας από το 1990 έως το 1995. (Πηγή ΕΣΥΕ).



Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

☑ **Κλάσεις :** Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις** (class intervals). Οι κλάσεις είναι της μορφής [α, β), [β, γ), …

☑ **Όρια των κλάσεων** λέγονται τα άκρα των κλάσεων.

☑ **Κεντρική τιμή μιας κλάσης** λέγεται το ημιάθροισμα των άκρων της κλάσης.

☑ **Πλάτος μιας κλάσης** λέγεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο άκρο της κλάσης.

Εύρος του δείγματος (range) *R* ονομάζουμε την διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από την μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος.

Συχνότητα της κλάσης i ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής x_i** καλείται το πλήθος των παρατηρήσεων που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση *i*

ΣΧΟΛΙΑ:

- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να "αντιπροσωπευθούν" από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.
- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση οπότε για παράδειγμα οι μισές παρατηρήσεις κάθε κλάσης βρίσκονται αριστερά του κέντρου κλάσης και οι μισές δεξιά αυτού.

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων

☑ **Ιστόγραμμα** συχνοτήτων ονομάζεται η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα.

☑ **Πως κατασκευάζεται:** Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

Σε Κλάσεις Ίσου Πλάτους

Θεωρώντας το πλάτος *c* ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες. Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες.

Πολύγωνο Συχνοτήτων

- Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon).
- *<u>Το εμβαδόν του χωρίου</u>* που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος *ν*.
- Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1,

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**.

- Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** της κατανομής.