ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ (ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ερώτηση θεωρίας 1

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

β) Τι ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

Λύση

α) Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$

Για $h\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

Άρα $(x)'=1$

β) Την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας ενός κινητού την ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0, δηλαδή

$$\upsilon=\lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta S}{h}$$

Ερώτηση θεωρίας 2

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες να δείξετε ότι:
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

β) Τι εκφράζει η παράγωγος μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

α) Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]=$

$(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$

Για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h}=$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$f'(x)+g'(x)$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

β) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$.

Ερώτηση θεωρίας 3

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$, όπου c πραγματική σταθερά, ισούται με μηδέν.

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

γ) Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$f(x)=(x+1)^3$, $g(x)=x^8+5x^3$, $\varphi(x)=5\cdot x^4+\ln 2$ και $s(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=c-c=0$$

και για $h\neq 0$,

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$, οπότε και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

Άρα $(c)'=0$.

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0\in A$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

γ) $f'(x)=\left((x+1)^3\right)'=3(x+1)^2\cdot(x+1)'=3(x+1)^2$,

$$g'(x)=\left(x^8+5x^3\right)'=\left(x^8\right)'+\left(5x^3\right)'=8x^7+15x^2,$$

$$\varphi'(x)=\left(5\cdot x^4+\ln 2\right)'=\left(5\cdot x^4\right)'+\left(\ln 2\right)'=5\cdot\left(x^4\right)'+0=5\cdot 4\cdot x^3=20x^3,$$

$$s'(x)=\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)'=\frac{(x)'\cdot\eta\mu x-x\cdot(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}=\frac{\eta\mu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}.$$

Ερώτηση θεωρίας 4

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Λύση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Ερώτηση θεωρίας 5

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Λύση

Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

Ερώτηση θεωρίας 6

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

<u>Λύση</u>

Αν Β είναι το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Ερώτηση θεωρίας 7

α) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι ίση με $f'(x)=2x$.

<u>Λύση</u>

α) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=\left(2x+h\right)h .$$

Για $h\neq 0$, είναι $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$.

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x+h\right)=2x .$$

Άρα $\left(x^2\right)'=2x$.

Ερώτηση θεωρίας 8

Γράψτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f(x)=x^{\nu}$, όπου ν φυσικός
$g(x)=e^{x}$, όπου x πραγματικός
$h(x)=\ln x$, όπου $x>0$
$t(x)=\sigma\upsilon\nu x$, όπου x πραγματικός

<u>Λύση</u>

$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$,

$g'(x)=e^{x}$,

$h'(x)=\frac{1}{x}$,

$t'(x)=-\eta\mu x$

Ερώτηση θεωρίας 9

Γράψτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$c\cdot f(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x)\neq 0$ και c σταθερά.

<u>Λύση</u>

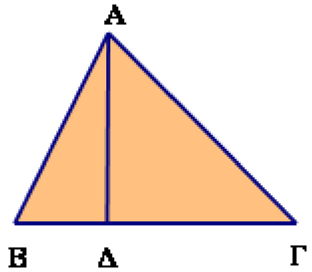
$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$,

$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Άσκηση 1

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του ΒΓ και του ύψους του ΑΔ να είναι 20cm.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης του ΒΓ=x είναι $E(x)=10x-\frac{1}{2}x^2$.

β) Να βρείτε το μήκος της βάσης του ΒΓ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο. Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

<u>Λύση</u>

α) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta$

Αν ονομάσουμε τη βάση ΒΓ=x τότε επειδή ΒΓ+ ΑΔ=20 έχουμε x+ΑΔ=20, ΑΔ=20-x με $x>0$ και $A\Delta=20-x>0 \Leftrightarrow 20>x$ άρα $0<x<20$.

Οπότε το εμβαδόν γράφεται $E(x)=\frac{1}{2}x(20-x)=\frac{1}{2}(20x-x^2)$, άρα

$E(x)=10x-\frac{1}{2}x^2,\ x\in(0,20)$

β) Για να βρούμε το μήκος της βάσης ΒΓ του τριγώνου για το οποίο το εμβαδόν του είναι μέγιστο, πρώτα βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης Ε(x).

$E'(x)=(10x-\frac{1}{2}x^2)'$, $E'(x)=10-x$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $E'(x)=0$

Από την $E'(x)=0 \Leftrightarrow 10-x=0 \Leftrightarrow x=10\ cm$

Κατόπιν φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου

x	0		10		20
E′(x)		+	0	-	
E(x)		$\nearrow$	Μέγιστο (10, E(10) = 50)	$\searrow$	

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο όταν η βάση του ΒΓ=x=10 cm.

Το εμβαδόν του τριγώνου στην περίπτωση αυτή είναι $E(10)=10\cdot 10-\frac{1}{2}10^2=100-50=50\ cm^2$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το α αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο ίσο με 5.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbf{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha)' = 3x^2 - 12x$$

β) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$

Το πρόσημο και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ. μέγιστο $(0, f(0) = \alpha)$	$\searrow$	τ. ελάχιστο $(4, f(4) = \alpha - 32)$	$\nearrow$	

Από τον πίνακα μεταβολών της f διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 4$, ίσο με $f(4)$.

Όμως $f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + \alpha = 64 - 96 + \alpha \Leftrightarrow f(4) = -32 + \alpha$

γ) Βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(4) = -32 + \alpha$

Αλλά $f(4) = 5$, οπότε $-32 + \alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 37$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha\cdot x^2-5x+2$, όπου $\alpha\in\mathbf{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-2$, τότε να υπολογίσετε το α.

β) Αν $\alpha=3$

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

<u>Λύση</u>

α) Η παράγωγος της συνάρτησης f ισούται με $f'(x)=2\cdot\alpha\cdot x-5$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $f'(1)=2\cdot\alpha-5$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y=x-2$ είναι ίσος με 1, οπότε ισχύει

$f'(1)=1\Leftrightarrow 2\cdot\alpha-5=1\Leftrightarrow\alpha=3$.

β)

i. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)=1$$

Στα προηγούμενα το τριώνυμο $3x^2-5x+2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\dfrac{2}{3}$ άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $3x^2-5x+2=3(x-1)\cdot\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$.

ii. Έχουμε

$f'(x)=\left(3x^2-5x+2\right)'=6x-5$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{6}$,

$f'(x)>0\Leftrightarrow 6x-5>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{6}$ και

$f'(x)<0\Leftrightarrow 6x-5<0\Leftrightarrow x<\dfrac{5}{6}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6}, +\infty\right)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{5}{6}$, το $f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{12}$.

Άσκηση 4

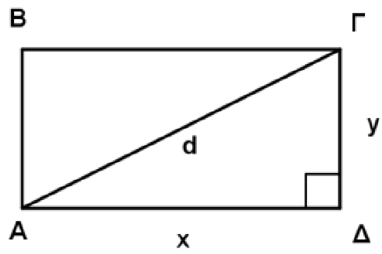
Με ένα σύρμα μήκους 100cm κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους x και πλάτους y.

α. Να εκφράσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το μήκος της διαγωνίου να γίνει ελάχιστο.

Λύση

Έχουμε το παρακάτω ορθογώνιο



Η περίμετρος ισούται με 100 cm, οπότε
$2x+2y=100 \Leftrightarrow y=50-x$ **(1)**

και επειδή τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι θετικοί αριθμοί, έχουμε
$y>0 \Leftrightarrow 50-x>0 \Leftrightarrow x<50$ και $x>0$, άρα
$x \in (0,50)$.

Επίσης εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ και παίρνουμε
$d^2=x^2+y^2$ **(2)**
και αντικαθιστώντας το y από την **(1)** στην **(2)** έχουμε
$d^2=x^2+(50-x)^2 \Leftrightarrow d=\sqrt{2x^2-100x+2500}$.

Άρα η συνάρτηση της διαγωνίου του ορθογωνίου είναι

$d(x)=\sqrt{2x^2-100x+2500}$ με $x \in (0,50)$.

β. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση της διαγωνίου και έχουμε

$$d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^2-100x+2500}}\left(2x^2-100x+2500\right)'=\frac{2x-50}{\sqrt{2x^2-100x+2500}}.$$

Επίσης

$d'(x)=0 \Leftrightarrow x=25$,

$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 25$ και

$d'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 25$. (αφού $\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}$ >0)

x	0		25		50
$d'(x)$		-		+	
$d(x)$		$\searrow$	d(25)	$\nearrow$	

Έτσι η d είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,25]$ και γνησίως αύξουσα στο $[25,50)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 25$. Τότε από την (1) έχουμε ότι $y = 25$, άρα η διαγώνιος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη όταν $x = y$ δηλαδή όταν είναι τετράγωνο.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+k^2}, k>0$. Αν το σημείο $M\left(1,\sqrt{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε:

α) Να δείξετε ότι $k=1$.

β) Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

<u>Λύση</u>

α) Αφού το σημείο $M\left(1,\sqrt{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα ισχύει

$$f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1^2+k^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$k^2+1=2\Leftrightarrow k^2=1\overset{k>0}{\Leftrightarrow}k=1$$

β) Για $k=1$, έχουμε $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Πρέπει $x^2+1\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbf{R}$.

γ) Έχουμε:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0$.
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0\overset{\sqrt{x^2+1}>0}{\Leftrightarrow}x>0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$.

- Έχει ελάχιστο το $f(0)=\sqrt{0^2+1}=1$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Πρέπει $x\geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\left[0,+\infty\right)$.

β) Για τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 .$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.
Για το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, έχουμε $f(0)=\sqrt{0}-1=-1$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,-1)$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1}{\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{4} .$$

δ) Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(1,0)$ (από το β ερώτημα).

Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, με $\lambda=f'(x_0)=f'(1)$ **(1)**.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$.

Έτσι η σχέση **(1)** $\lambda=f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Επίσης το σημείο $A(1,0)\in\varepsilon$, άρα ισχύει $0=\lambda\cdot 1+\beta\Rightarrow\beta=-\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α είναι $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f}(x)=x^{2011}$.

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2011}-1}{h}$.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

γ) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-2011x^{2009}}{x-1}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A=\mathbf{R}$.
Έχουμε $f(1)=1^{2011}=1$, οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2011}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)\,,\quad \textbf{(1)}$$

Όμως για κάθε $x\in\mathbf{R}$ είναι $f'(x)=2011\cdot x^{2010}$ και $f'(1)=2011$, **(2)**

Άρα η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2011}-1}{h}=2011$.

β) Έστω $y=\lambda\cdot x+\beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.
Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(1)=2011$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y=2011\cdot x+\beta$.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M\left(1,f\left(1\right)\right)$, δηλαδή από το $M\left(1,1\right)$, ισχύει η σχέση $1=2011\cdot 1+\beta$, οπότε $\beta=-2010$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y=2011\cdot x-2010$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-2011x^{2009}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2011x^{2010}-2011x^{2009}}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2011x^{2009}(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2011x^{2009})=2011$$

Άσκηση 8

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $M\left(1,\sqrt{3}\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30^o.

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-\sqrt{3}}{h}$.

<u>Λύση</u>

α) Το σημείο $M\left(1,\sqrt{3}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, άρα ισχύει:

$$f(1)=\sqrt{3} \quad \textbf{(1)}$$

β) Η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30^o, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(1) = \varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \textbf{(2)}$$

γ) Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-\sqrt{3}}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) \overset{(2)}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>Παρατήρηση</u>
Δεν αποτελούν εξεταστέα-διδακτέα ύλη όσα θέματα αναφέρονται στην εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.