ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί που πήραν είκοσι φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος σ' ένα μάθημα

2	9	3	1	7	5	3	6	5	7
5	7	3	6	1	5	2	1	3	5

α. Ποια είναι η μεταβλητή;

β. Τι είδους μεταβλητή είναι;

γ. Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής;

δ. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , σχετικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

ε. Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που πέρασαν το μάθημα (τουλάχιστον 5)

στ. Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

<u>Λύση:</u>

α. Η μεταβλητή είναι ο βαθμός που πήραν οι φοιτητές στο συγκεκριμένο μάθημα

β. Η μεταβλητή είναι διακριτή

γ. Οι τιμές της μεταβλητής είναι:

1,2,3,5,6,7

δ. Η διαλογή γίνεται για να μας βοηθήσει στην εύρεση των συχνοτήτων:

$$\boxed{N_i = N_{i-1} + v_i \quad , \quad F_i = F_{i-1} + f_i}$$

Άρα:

$$N_1 = v_1, \quad F_1 = f_1 \quad , \quad N_2 = N_1 + v_1, \quad F_2 = F_1 + f_1,$$

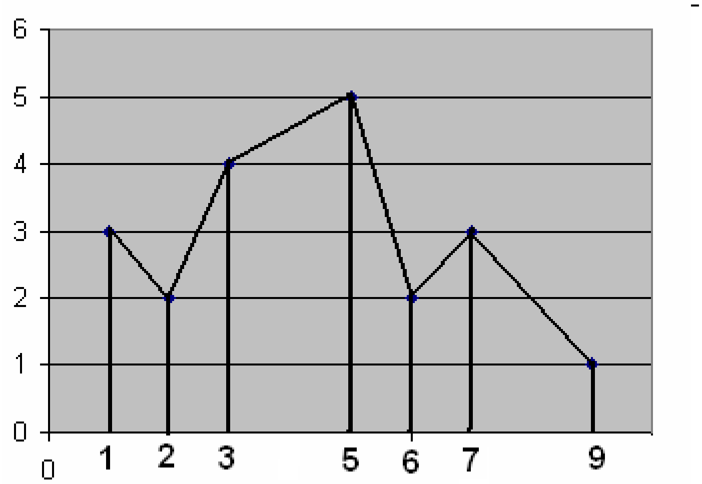
$$N_3 = N_2 + v_3, \quad F_3 = F_2 + f_3, \quad ...$$

x_i	*Διαλογή*	v_i	f_i	$f_i\,\%$	N_i	F_i	$F_i\,\%$
1	III	3	0,15	15	3	0,15	15
2	II	2	0,10	10	5	0,25	25
3	IIII	4	0,20	20	9	0,45	45
5	~~IIII~~	5	0,25	25	14	0,70	70
6	II	2	0,10	10	16	0,80	80
7	III	3	0,15	15	19	0,95	95
9	I	1	0,05	5	20	1	100
Σύνολα		20	1	100			

ε. Το ποσοστό των φοιτητών που πέρασαν το μάθημα είναι 55%

Το ποσοστό μπορεί να βρεθεί βρίσκοντας των αριθμό των φοιτητών από τις συχνότητες v_i και μετά το αντίστοιχο ποσοστό από τη στήλη f_i % και έπειτα προσθέτοντας τα αντίστοιχα ποσοστά

στ. Το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι:



2. Για την ανάδειξη του αρχηγού και των αναπληρωματικών αρχηγών σε μια ομάδα ποδοσφαίρου με 20 παίκτες οι υποψήφιοι ήταν: ο Τάκης (Τ), ο Βασίλης (Β), ο Φάνης (Φ), ο Κώστας (Κ) και ο Γιώργος (Γ). Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ψήφοι που πήραν οι υποψήφιοι αρχηγοί.

Τ	Τ	Β	Γ	Κ	Γ	Β	Φ	Κ	Γ
Β	Τ	Β	Γ	Κ	Β	Γ	Γ	Τ	Φ

α. Ποια είναι η μεταβλητή;

β. Τι είδους μεταβλητή είναι ;
γ. Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής ;
δ. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , σχετικών συχνοτήτων
ε. Έχουν νόημα οι αθροιστικές συχνότητες ;
στ. Ποιος είναι τελικά ο αρχηγός και οι αναπληρωματικοί αρχηγοί ;
ζ. Να κάνετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Λύση:

α. Η μεταβλητή είναι οι ψήφοι που πήραν οι υποψήφιοι αρχηγοί.

β. Η μεταβλητή είναι ποιοτική

γ. Οι τιμές της μεταβλητής είναι Τ , Β , Φ , Κ , Γ .

δ. Η διαλογή γίνεται για να μας βοηθήσει στην εύρεση των συχνοτήτων

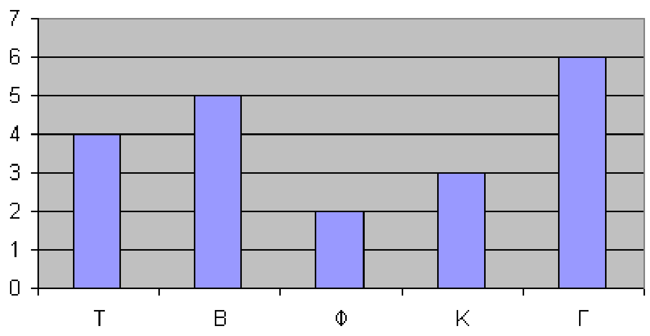
x_i	***Διαλογή***	ν_i	f_i	$f_i\%$
Τ	IIII	4	0,20	20
Β	~~IIII~~	5	0,25	25
Φ	II	2	0,10	10
Κ	III	3	0,15	15
Γ	~~IIII~~ I	6	0,30	30
Σύνολα		20	1	100

ε.

Στις ποιοτικές μεταβλητές οι αθροιστικές συχνότητες δεν έχουν νόημα.

στ. Ο αρχηγός είναι ο Γιώργος και οι αναπληρωματικοί αρχηγοί είναι ο Βασίλης και ο Τάσος.

ζ. Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων είναι:



3. Η κατανομή του Ελληνικού Πληθυσμού τα έτη απογραφής 1951-1961-1971, εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

ΕΤΟΣ ΑΠΟΓΡΑΦΗΣ	ΑΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %	ΗΜΙΑΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %	ΑΓΡΟΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %
1951	37,7	14,8	47,5
1961	43,3	43,3	43,8
1971	53,2	11,6	35,2

Πηγή: ΕΣΥΕ

α. Τι είδους πίνακας είναι;
β. Ποιος είναι ο τίτλος;
γ. Ποιες είναι οι επικεφαλίδες;
δ. Ποιο είναι το κύριο σώμα;
ε. Ποια είναι η πηγή;
στ. Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Λύση:

α. Ο πίνακας είναι γενικός

β. Ο τίτλος είναι «Η κατανομή του Ελληνικού Πληθυσμού τα έτη απογραφής 1951-1961-1971»

γ. Οι επικεφαλίδες είναι

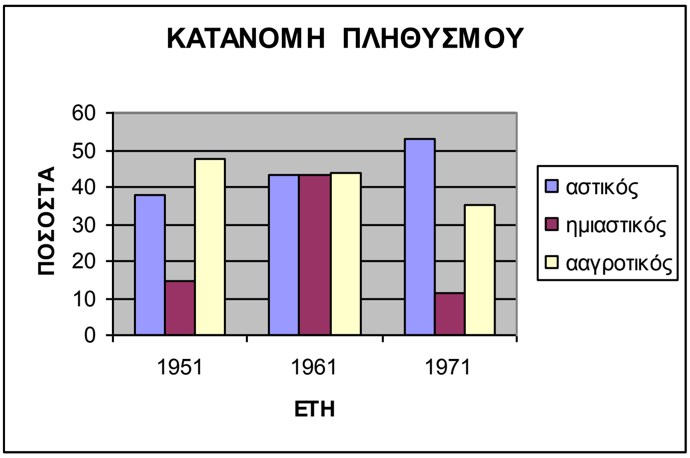
ΕΤΟΣ ΑΠΟΓΡΑΦΗΣ	ΑΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %	ΗΜΙΑΣΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %	ΑΓΡΟΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ %
1951			
1961			
1971			

δ. Το κύριο σώμα είναι

37,7	14,8	47,5
43,3	43,3	43,8
53,2	11,6	35,2

ε. Η πηγή είναι : ΕΣΥΕ

στ. Το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι :



4. Σ' ένα εκλογικό τμήμα μερικά από τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα

ΚΟΜΜΑΤΑ	ΨΗΦΟΙ ν_i	ΣΧ. ΣΥΧΝ. f_i
Α		0,15
Β		0,5
Γ		0,25
Δ	2000	
σύνολα		

Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη κατανομή

Λύση:

Για τη συμπλήρωση του πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$ **και** $f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$

Επειδή:

$$f_1+f_2+f_3+f_4=1 \quad \text{θα έχουμε} \quad f_4=0{,}10$$

Επίσης ισχύει:

$$f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$$

Άρα

$$f_4=\frac{\nu_4}{\nu} \Rightarrow 0{,}10=\frac{2000}{\nu} \Rightarrow \nu=\frac{2000}{0{,}1}=20000$$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

ΚΟΜΜΑΤΑ	ΨΗΦΟΙ ν_i	ΣΧ. ΣΥΧΝ. f_i
Α	3000	0,15
Β	10000	0,5
Γ	5000	0,25
Δ	2000	0,10
σύνολα	20000	1

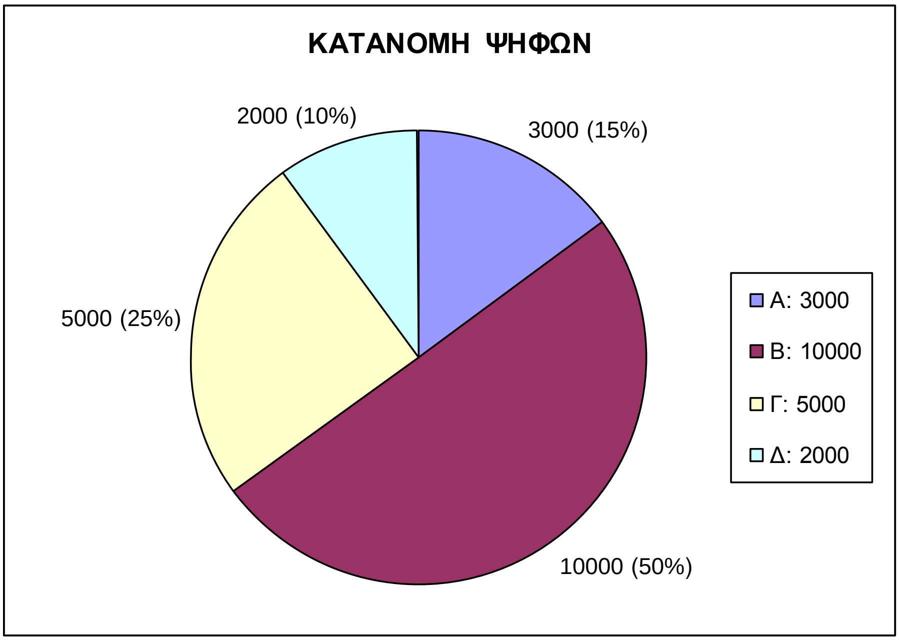
Η γωνία (ή το τόξο) α_i σε μοίρες που αντιστοιχεί σε κάθε τιμή της μεταβλητής x_i δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_i = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 360^o$$

Άρα:

$$\alpha_1 = 0,15 \cdot 360^o = 54^o, \quad \alpha_2 = 0,5 \cdot 360^o = 180^o,$$
$$\alpha_3 = 0,25 \cdot 360^o = 90^o, \quad \alpha_4 = 0,1 \cdot 360^o = 36^o$$

έτσι το κυκλικό διάγραμμα θα έχει ως εξής:



5. Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών ν_i
0	7
1	15
2	20
3	5
4	3
Σύνολο:	50

α. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , σχετικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

β. Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν δύο τουλάχιστον παιδιά.

γ. Να βρείτε το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τρία το πολύ παιδιά.

<u>Λύση:</u>

α. Ο ζητούμενος πίνακας είναι:

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0	7	0,14	14	7	0,14	14
1	15	0,30	30	22	0,44	44
2	20	0,40	40	42	0,84	84
3	5	0,10	10	47	0,94	94
4	3	0,06	6	50	1	100
Σύνολα	50	1	100			

β. Δύο τουλάχιστον παιδιά σημαίνει δύο ή τρία ή τέσσερα παιδιά. Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι 40+10+6=56%

γ. Τρία το πολύ παιδιά μηδέν ή ένα ή δύο ή τρία παιδιά. Από τον πίνακα φαίνεται ότι αυτό το ποσοστό είναι 96%

6. Η κατανομή σχετικών συχνοτήτων των βαθμών 300 φοιτητών του Φυσικού τμήματος που πέρασαν το μάθημα Αστρονομία Ι δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός x_i	Σχετική συχνότητα f_i
5	0.16
6	0.4
7	0.15

8	0.12
9	0.09
10	0.08
Σύνολο:	1

α. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , σχετικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

β. Πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό 5.

γ. Πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό μεγαλύτερο από 6.

δ. Πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό 9 ή 10.

(Ε.Μ.Ε.)

Λύση:

Για τη συμπλήρωση του πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$

α. Ο ζητούμενος πίνακας είναι:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot v \quad \text{άρα} \quad v_1 = 0.16 \cdot 300 = 48$$

Ομοίως βρίσκουμε και τις άλλες συχνότητες

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
5	48	0,16	16	48	0,16	16
6	120	0,40	40	168	0,56	56
7	45	0,15	15	213	0,71	71
8	36	0,12	12	249	0,83	83
9	27	0,09	9	276	0,92	92
10	24	0,08	8	300	1	100
Σύνολα	300	1	100			

β. 48 φοιτητές πήραν βαθμό 5.

γ. Βαθμό μεγαλύτερο από 6 πήραν 45+36+27+24=132 φοιτητές.

δ. Βαθμό 9 ή 10 πήραν 24+27=51 φοιτητές.

7. **Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα**

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	F_i

1			4	0,1
2		30		
3				
4	6			
σύνολα	40			

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι:

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2 = f_2 \cdot v$$

άρα:

$$v_2 = 0,3 \cdot 40 = 12$$

$$v_1 = N_1 = 4,$$

$$F_1 = f_1 = 0,1 \Rightarrow f_1\% = 10$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot v \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,1 \cdot 40 = 4$$

Το βασικό πρόβλημα για τη συμπλήρωση κενών στους πίνακες είναι να βρεθεί το ν και στη συνέχεια οι συχνότητες ν_i οι οποίες βρίσκονται με τη χρήση των βασικών τύπων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$

άρα:

$$v_2 = 0,3 \cdot 40 = 12$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Rightarrow v_3 = 22$$

Επομένως ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	F_i
1	4	10	4	0,1
2	12	30	16	0,4
3	18	45	34	0,85
4	6	15	40	1
σύνολα	40	100		

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
-6	8	0,4				
-3				10		
0	5					

3						
6			10			
σύνολα						

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι:

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_1}{f_1} \Rightarrow \nu = \frac{8}{0,4} = 20$$

$$N_2 = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = 2, \quad N_1 = \nu_1 = 8, \quad F_1 = f_1 = 0,4 \Rightarrow f_1\% = 40$$

$$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Rightarrow f_2 = \frac{2}{20} = 0,1, \quad F_2 = f_1 + f_2 = 0,5, \quad f_3 = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow \nu_5 = f_5 \cdot \nu = 0,1 \cdot 20 = 2$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Rightarrow f_4 = 0,15, \quad f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \Leftrightarrow \nu_4 = f_4 \cdot \nu = 0,15 \cdot 20 = 3$$

Άρα ο πίνακας γίνεται

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
-6	8	0,4	40	8	0,4	40
-3	2	0,1	10	10	0,5	50
0	5	0,25	25	15	0,75	75
3	3	0,15	15	18	0,9	90
6	2	0,1	10	20	1	100
σύνολα	20	1	100			

9. Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα x_i	**Συχνότητα** ν_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
Α		0,15

Β	150	0,30
Γ		0,35
Δ		
Σύνολο		

α. Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

β. Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

γ. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Λύση:

α. Παρατηρούμε ότι:

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_2}{f_1} \Rightarrow v = \frac{150}{0,3} = 500$$

άρα στο τμήμα αυτό ψήφισαν 500 εκλογείς

β. Παρατηρούμε ότι:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Rightarrow f_4 = 1 - 0,15 - 0,3 - 0,35 = 0,2$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot v \quad \text{άρα} \quad v_1 = 0.15 \cdot 500 = 75$$

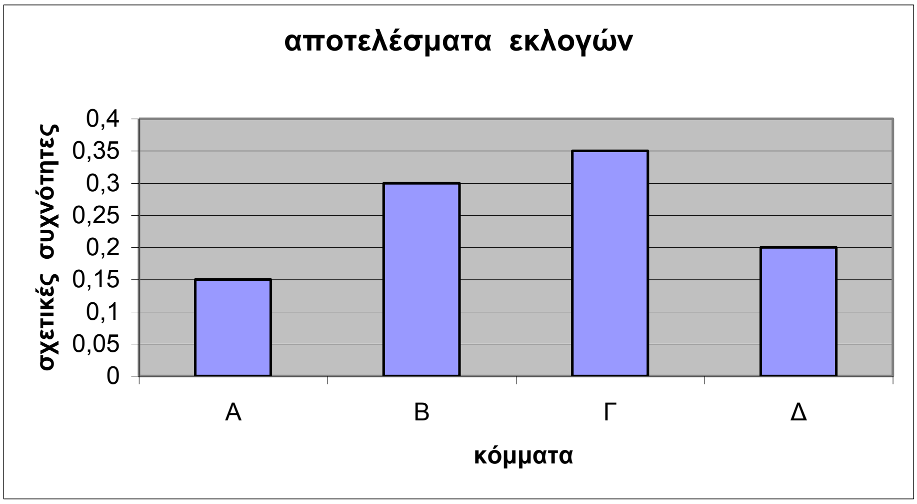
Ομοίως βρίσκουμε:

$$\nu_3 = 175 \qquad \text{και} \qquad \nu_4 = 100$$

Άρα ο πίνακας έχει ως εξής:

Κόμμα x_i	**Συχνότητα** ν_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
Α	75	0,15
Β	150	0,30
Γ	175	0,35
Δ	100	0,20
Σύνολο	500	1

γ. Το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων έχει ως εξής:



10. Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σ' ένα διαγώνισμα είναι

5 , 6 ,7 , 8 , 9 , 10

Το 84% των φοιτητών πήραν τουλάχιστον 6
Οι φοιτητές που πήραν 5 είναι διπλάσιοι από αυτούς που πήραν 10
168 φοιτητές έχουν βαθμό κάτω από 7
87 φοιτητές έχουν βαθμό πάνω από 7
Το 36% των φοιτητών πήραν 7 ή 8 ή 9
Οι φοιτητές που πήραν 9 είναι τα 3/4 από αυτούς που πήραν 8
Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων , σχετικών συχνοτήτων και των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

<u>**Λύση:**</u>

Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$f_1 = 0{,}16 \quad \text{και} \quad f_1 = 2 \cdot f_6 \;\Rightarrow\; f_6 = 0{,}08$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 \quad \text{όμως} \quad f_3 + f_4 + f_5 = 0{,}36, \qquad f_1 + f_6 = 0{,}24$$

Άρα:

$$f_2 = 0{,}4\,, \qquad f_1 + f_2 = \frac{v_1 + v_2}{v} \;\Rightarrow\; 0{,}56 = \frac{168}{v} \;\Rightarrow\; v = 300$$

Άρα αυτοί που έχουν βαθμό 7 είναι:

$$v_3 = 300 - 168 - 87 = 45$$

Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0{,}16 \cdot 300 = 48, \quad v_2 = 168 - 48 - 120$$

$$v_6 = f_6 \cdot v = 0{,}08 \cdot 300 = 24$$

$$f_3 + f_4 + f_5 = 0{,}36 \;\Rightarrow\; \frac{v_3 + v_4 + v_5}{v} = 0{,}36 \;\Rightarrow$$

$$\nu_3+\nu_4+\nu_5=0,36\cdot 300=108$$

άρα $\nu_4+\nu_5=108-45=63$ όμως $\nu_5=\frac{3}{4}\nu_4$ επομένως $\nu_4=36$ και $\nu_5=27$

και ο πίνακας έχει ως εξής:

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
5	48	0,16	16	48	0,16	16
6	120	0,40	40	168	0,56	56
7	45	0,15	15	213	0,71	71
8	36	0,12	12	249	0,83	83
9	27	0,09	9	276	0,92	92
10	24	0,08	8	300	1	100
Σύνολα	300	1	100			

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
(κλάσεις ίσου πλάτους)

11. Δίνεται ο μηνιαίος μισθός (σε ευρώ) των 50 υψηλόμισθων υπαλλήλων μιας μεγάλης εταιρείας.

1800	1100	1700	1900	**1000**	1950	1950	1300	1300	1950
2000	3000	2000	3000	2000	2500	2500	2800	2850	2850
2700	2700	3000	3300	2700	1750	2000	2500	2500	3300
3600	3600	2800	3600	2200	2250	3400	3700	3800	3800
4000	4500	3800	3800	4500	**4950**	4500	4500	3700	3700

α. Να γίνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

β. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων $\boldsymbol{\nu_i}$, $\mathbf{N_i}$, $\mathbf{f_i\%}$, $\mathbf{F_i\%}$

γ. Να κάνετε ιστόγραμμα συχνοτήτων $\boldsymbol{\nu_i}$ και ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $\mathbf{F_i\%}$ καθώς και τα αντίστοιχα πολύγωνα

δ. Αν υποτεθεί ότι σε κάθε κλάση οι μισθοί είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν μισθό πάνω από 3500 ευρώ.

Λύση:

α. Εντοπίζουμε το μεγαλύτερο 4950 Euro και το μικρότερο 1000 Euro

Βρίσκουμε το εύρος:

$$R = 4950 - 1000 = 3950$$

Διαιρούμε το εύρος **R** με το πλήθος των κλάσεων **κ** για να βρούμε το πλάτος, c της κάθε κλάσης:

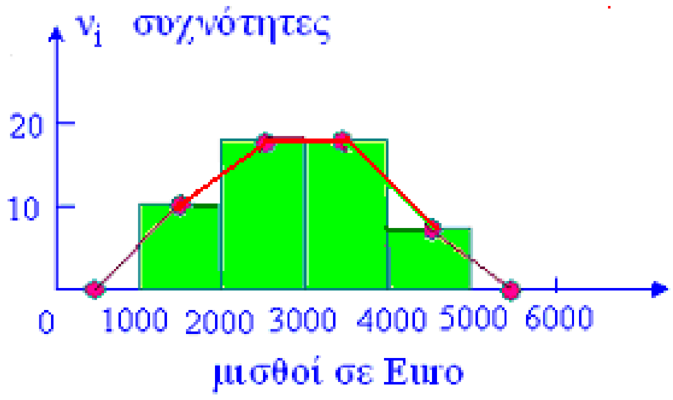
$$c = \frac{R}{\kappa} \Rightarrow c = \frac{3950}{4} \approx 1000$$

Για πρακτικούς λόγους στρογγυλοποιούμε το πλάτος της κλάσης προς τα πάνω

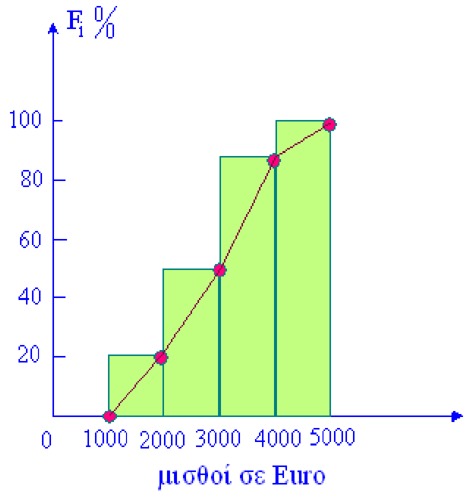
β. Έτσι (μετά τη διαλογή) ο πίνακας έχει ως εξής:

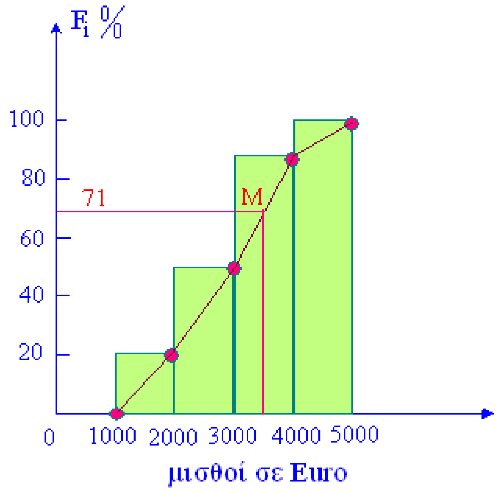
Μηνιαίος μισθός **[-)**	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Συχνότητες** ν_i	**Σχετικές Συχνότητες** f_i	**Αθροιστικές συχνότητες** N_i	**Αθροιστικές σχετ. συχνότητες** $F_i\%$
1000-2000	1500	10	0,2	10	20
2000-3000	2500	17	0,34	27	54
3000-4000	3500	17	0,34	44	88
4000-5000	4500	6	0,12	50	100
Σύνολα		50	1		

γ. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων, είναι:



Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, είναι:





δ. Από το σημείο 3500 στον άξονα των μισθών, φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα των σχετικών συχνοτήτων Fi%. Αν F_γ είναι η ένδειξη που αντιστοιχεί στο σημείο 3500 των μισθών, τότε:

$$\boxed{F_\gamma = 71\%}$$

Επομένως πάνω από 3500 Euro τον μήνα, παίρνει περίπου:

$$\boxed{100 - 71 = 29\% \quad \text{των υπαλλήλων}}$$

12. Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Κεντρικές Τιμές	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική συχνότητα
		10	10	
		15	15	
		12	12	
		15	15	
		18	18	
		18	18	
		12	12	
Σύνολα				

Α. Να κάνετε ιστόγραμμα συχνοτήτων και πολύγωνο συχνοτήτων.

Β. Να κάνετε ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

Γ. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

Δ. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α. Πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

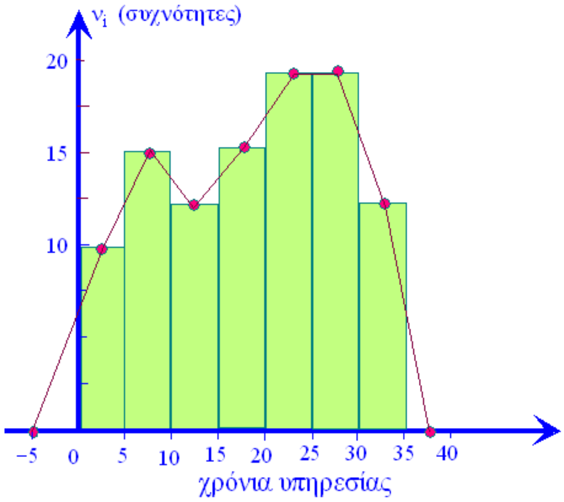
β. Πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

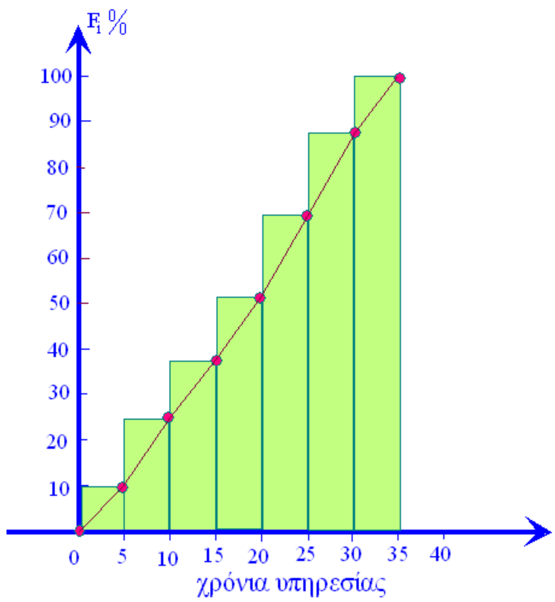
Συμπληρώνουμε τον πίνακα

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\,\%$	Αθροιστική Σχετική συχνότητα $F_i\,\%$
$0-5$	2,5	10	10	10
$5-10$	7,5	15	15	25
$10-15$	12,5	12	12	37
$15-20$	17,5	15	15	52
$20-25$	22,5	18	18	70
$25-30$	27,5	18	18	88
$30-35$	32,5	12	12	100
Σύνολα		100	100	

Α. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων, είναι:



Β. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, είναι:



Γ. Τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας έχουν:

$$\boxed{15+18+18+12=63 \quad \text{εκπαιδευτικοί}}$$

Δ. **α.** Σε 12,5 χρόνια θα πάρουν σύνταξη όσοι ανήκουν στις κλάσεις $30,35$, $25,30$ και οι μισοί περίπου της κλάσης $20,25$. Δηλαδή αυτοί που έχουν τουλάχιστον 22,5 χρόνια υπηρεσίας, εφ' όσον οι εκπαιδευτικοί αυτοί είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι, ως προς τα χρόνια υπηρεσίας σ' αυτή την κλάση. Άρα θα πάρουν σύνταξη:

$$\boxed{12+18+9=39 \quad \text{εκπαιδευτικοί}}$$

β. Θα πάρουν σύνταξη όσοι ανήκουν στην κλάση $30,35$ αφού σε 5 χρόνια όλοι αυτοί θα έχουν τουλάχιστον 35 χρόνια υπηρεσίας. Άρα πρέπει να προσληφθούν:

$$\boxed{12 \quad \text{εκπαιδευτικοί}}$$

13. Οι χρόνοι που έκαναν μια ομάδα οδηγών της φόρμουλα 1 για να κάνουν ένα γύρο της πίστα είναι από 100 ως 200 δευτερόλεπτα χωρισμένοι σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα (των χρόνων) και το πολύγωνο συχνοτήτων του δείγματος έχει εμβαδόν 80 αν θεωρήσουμε ως μονάδα το πλάτος της κάθε κλάσης.
- Η σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση με κεντρική τιμή 190 είναι 0,1.
- Η σχετική συχνότητα που αντιστοιχεί στην κλάση [140 , 160) είναι 0,2 .
- Οι οδηγοί που έκαναν από 160 ως 180 δευτερόλεπτα είναι διπλάσιοι από τους οδηγούς που έκαναν από 100 ως 120 δευτερόλεπτα .
- 48 οδηγοί έκαναν χρόνο κάτω από 160 δευτερόλεπτα.

Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων ν_i , N_i, $f_i\%$, $F_i\%$

Λύση:

Βρίσκουμε το εύρος R του δείγματος:

$$R = 200 - 100 = 100$$

Άρα το πλάτος c κάθε κλάσης θα είναι:

$$c = \frac{R}{\kappa} = \frac{100}{5} = 20$$

> Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο συχνοτήτων, αν θεωρήσουμε ως μονάδα το πλάτος των κλάσεων, είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Επειδή το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι 80, το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$\boxed{\nu = 80}$$

Με αρχή το 100 και πλάτος 20, οι κλάσεις που δημιουργούνται είναι:

$$100,120 \ , \quad 120,140 \ , \quad 140,160 \ , \quad 160,180 \quad \text{και} \quad 180,200$$

Η κλάση με κέντρο το 190 είναι η πέμπτη $180,200$. Άρα:

$$\boxed{f_5 = 0,1}$$

Η κλάση $140,160$ είναι η τρίτη, άρα:

$$\boxed{f_3 = 0,2}$$

Έτσι $\nu_3 = 80 \cdot 0,2 = 16$ και $\nu_5 = 80 \cdot 0,1 = 8$. Η τέταρτη κλάση $160,180$ έχει διπλάσια συχνότητα της πρώτης $100,120$. Άρα:

$$\nu_4 = 2\nu_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_4 = 2f_1}$$

Ακόμη 48 οδηγοί έκαναν χρόνο κάτω από 160 sec, άρα:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 48$$

Όμως:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 80$$

Επομένως:

$$48+\nu_4+8=80 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_4=24$$

και

$$\nu_1=\frac{\nu_4}{2}=12, \qquad \nu_2=48-12-16=20$$

Οπότε ο ζητούμενος πίνακας έχει ως εξής:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Σχετική συχνότητα $F_i\%$
100 – 120	110	12	15	15
120 – 140	130	20	25	40
140 – 160	150	16	20	60
160 – 180	170	24	30	90
180 – 200	190	8	10	100
Σύνολα		80	100	

14. Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	**Κέντρο κλάσης** x_i	**Συχνότητα** ν_i **(σε χιλιάδες)**	**Σχετική συχνότητα** $f_i\%$	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i **(σε χιλιάδες)**	**Αθρ. Σχετ. Συχνότητα** $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
ΣΥΝΟΛΑ		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα x_i, $f_i\%$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Γ. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $x_i, F_i\%$ και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων

Ε. Να εκτιμήσετε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση το πολύ 40 χιλιομέτρων θεωρώντας ότι σε κάθε κλάση τα οχήματα κατανέμονται ομοιόμορφα.

<u>Λύση:</u>

Α. Παρατηρούμε ότι:

$$f_1\% = \frac{60}{200}\cdot 100 = 30\%, \qquad f_2\% = F_2\% - F_1\% = 38\%$$

Άρα:

$$f_2 = 0{,}38 \quad \text{και} \quad \nu_2 = 200\cdot 0{,}38 = 76$$

και

$$N_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 60 + 76 + \nu_3, \quad \text{άρα} \quad \nu_3 = 180 - 136 = 44$$

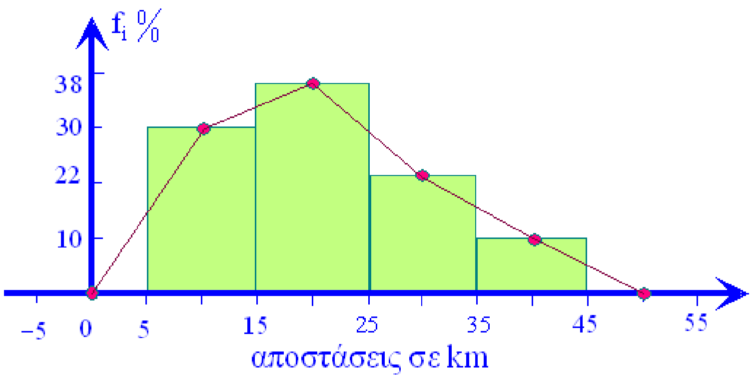
Επίσης:

$$N_4 = \nu = 200, \quad \text{άρα} \quad \nu_4 = 20$$

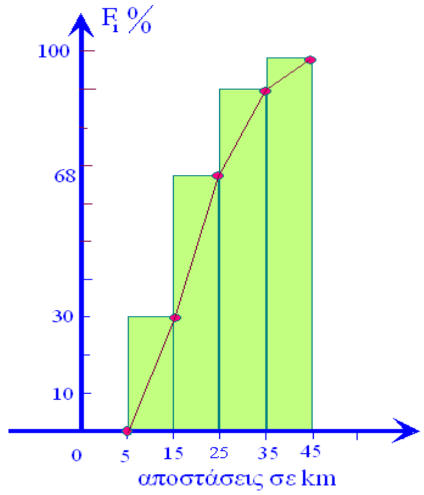
Έτσι ο πίνακας έχει ως εξής:

Κλάσεις σε χλμ.	**Κέντρο κλάσης** x_i	**Συχνότητα** ν_i **(σε χιλιάδες)**	**Σχετική συχνότητα** $f_i\%$	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i **(σε χιλιάδες)**	**Αθρ. Σχετ. Συχνότητα** $F_i\%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	10
ΣΥΝΟΛΑ		200	100		

Β. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.



Γ. Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. είναι:



Δ. Το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 km ανήκουν στις κλάσεις:

$$25,35 \quad \text{και} \quad 35,45$$

Άρα είναι:

$$\boxed{44+20=64 \text{ χιλιάδες αυτοκίνητα}}$$

Ε. Τα οχήματα που διανύουν το πολύ 40 km είναι αυτά που ανήκουν στις κλάσεις:

$$5,15 \;, \quad 15,25 \;, \quad 25,35$$

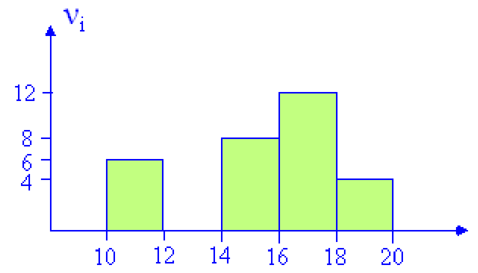
και στο υποδιάστημα $35,40$ της κλάσης $35,45$. Στο υποδιάστημα $35,40$ που είναι το μισό της τελευταίας κλάσης ανήκουν τα μισά οχήματα μιας και αυτά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα μέσα στην κλάση. Άρα συνολικά:

$$\boxed{60+76+44+10=190 \text{ οχήματα}}$$

διανύουν το πολύ 40 km .

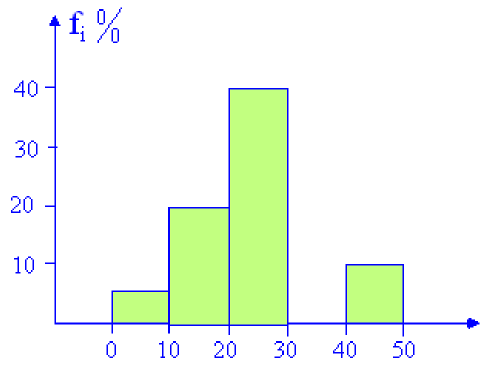
15. Να σχεδιάσετε το ορθογώνιο που λείπει στα παρακάτω ιστογράμματα:

Α.



Αν το μέγεθος του δείγματος είναι: $\nu = 40$

Β.



<u>Λύση:</u>

Α. Ουσιαστικά ζητάμε τη συχνότητα ν_2 της κλάσης 12-14 . Όμως:

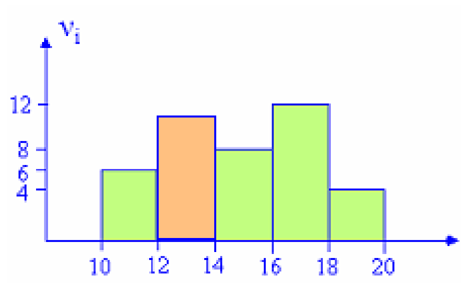
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 40$$

Επομένως:

$$6 + \nu_2 + 8 + 12 + 4 = 40 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_2 + 30 = 40 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\nu_2 = 10}$$

Έτσι τελικά το ιστόγραμμα γίνεται:



Β. Σ' αυτή την περίπτωση ζητάμε την σχετική συχνότητα $f_4\%$ της τέταρτης κλάσης. Ισχύει:

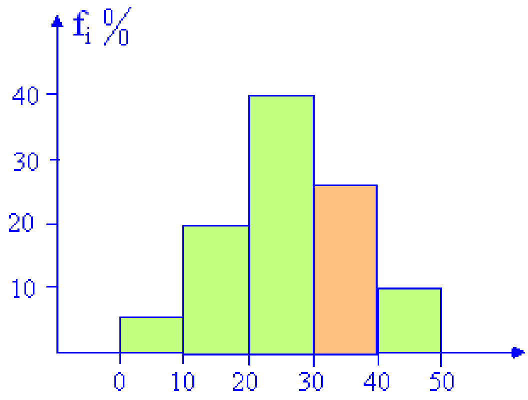
$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$$

από την οποία έχουμε:

$$5 + 20 + 40 + f_4 + 10 = 100 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f_4\% = 25\%}$$

Έτσι τελικά το ιστόγραμμα γίνεται:



16. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X για την οποία ισχύουν:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

και

$$f_i = \frac{i}{5\kappa}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

α. Να βρείτε τον αριθμό κ

β. Αν $\nu_4 = 100$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος και τις υπόλοιπες συχνότητες.

<u>Λύση:</u>

α. Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$$

άρα:

$$\frac{1}{5\kappa} + \frac{2}{5\kappa} + \frac{3}{5\kappa} + \frac{4}{5\kappa} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{5\kappa} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5\kappa = 10 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\kappa = 2}$$

β. Για $\kappa = 2$, είναι $f_4 = \frac{4}{10} = 0,4$. Επομένως το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$\nu = \frac{\nu_4}{f_4} = \frac{100}{0,4} = 250$$

Ακόμα έχουμε:

$$\nu_1 = f_1 \cdot \nu = 0,1 \cdot 250 = 25 \qquad \nu_2 = f_2 \cdot \nu = \frac{2}{10} \cdot 250 = 50$$

$$\nu_3 = f_3 \cdot \nu = \frac{3}{10} \cdot 250 = 75$$

17. Με ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξωσχολικές δραστηριότητες 200 μαθητών. Το 25% των μαθητών ασχολούνται με τους Η/Υ. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σ' αυτούς που ασχολούνται με τον αθλητισμό είναι 54^{o}. Αυτοί που ασχολούνται με τη μουσική είναι πενταπλάσιοι από αυτούς που ασχολούνται με το διάβασμα των βιβλίων. Άλλες δραστηριότητες δεν αναφέρθηκαν.

α. Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητών σε κάθε περίπτωση.

<u>Λύση:</u>

α.

Το βασικό πρόβλημα είναι να βρούμε πόσες μοίρες είναι το τόξο α_i κάθε τομέα.

Έστω:

x_1: Η/Υ

x_2: Αθλητισμός

x_3: Μουσική

x_4: Βιβλία

οι τιμές της ποιοτικής μεταβλητής:

X: Εξωσχολικές δραστηριότητες

Τότε:

$$f_1 = \frac{25}{100} = 0,25$$

άρα:

$$\alpha_1 = f_1 \cdot 360^{o} = 0,25 \cdot 360^{o} = 90^{o}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\nu_3 = 5\cdot\nu_4 \quad\Leftrightarrow\quad f_3 = 5\cdot f_4 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha_3 = 5\cdot\alpha_4$$

Όμως:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^o$$

Άρα:

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 360^o - \alpha_1 - \alpha_2 = 360^o - 90^o - 54^o \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_3 + \alpha_4 = 216^o}$$

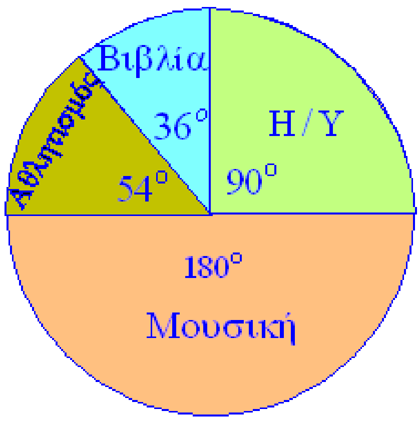
Επομένως:

$$5\cdot\alpha_4 + \alpha_4 = 216^o \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha_4 = 36^o}$$

και

$$\boxed{\alpha_3 = 5\cdot 36^o = 180^o}$$

Άρα το κυκλικό διάγραμμα έχει ως εξής:



β.

Για τα τόξα α_i των κυκλικών τομέων, ισχύει:

$$\alpha_i = f_i \cdot 360^o$$

Άρα:

$$f_i = \frac{\alpha_i}{360^o}$$

Ισχύει:

$$\nu_1 = f_1 \cdot \nu = 0,25\cdot 200 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nu_1 = 50}$$

Ακόμη έχουμε:

$$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^o \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{\alpha_2}{360^o} = \frac{54^o}{360^o} = 0,15$$

Άρα:

$$\nu_2 = f_2 \cdot \nu = 0,15 \cdot 200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_2 = 30}$$

Ενώ:

$$f_3 = \frac{\alpha_3}{360^o} = \frac{180^o}{360^o} = 0,5$$

Άρα:

$$\nu_3 = f_3 \cdot \nu = 0,5 \cdot 200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_3 = 100}$$

και

$$\nu_4 = \nu - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_4 = 20}$$

18. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X, με:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

Αν οι αθροιστικές συχνότητες N_i δίνονται από τη σχέση:

$$N_i = 4 \cdot i^2 + 10, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Να βρείτε:

α. Το μέγεθος του δείγματος.

β. Τη σχετική συχνότητα f_3 της τιμής x_3.

<u>Λύση:</u>

α. Το μέγεθος του δείγματος ν είναι ίσο με την αθροιστική συχνότητα N_4 της τιμής x_4. Όμως:

$$N_4 = 4 \cdot 4^2 + 10 = 74 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = 74}$$

β.

Επειδή:

$$N_i = N_{i-1} + \nu_i, \quad i = 2, ..., \kappa$$

Έχουμε:

$$\nu_i = N_i - N_{i-1}$$

Για ισχύει $N_1 = \nu_1$

Γνωρίζουμε ότι:

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu}$$

Όμως:

$$\nu_3 = N_3 - N_2$$

και

$$N_3 = 4 \cdot 3^2 + 10 = 46, \qquad N_2 = 4 \cdot 2^2 + 10 = 26$$

Άρα:

$$\nu_3 = 46 - 26 = 20$$

με συνέπεια:

$$\boxed{f_3 = \frac{20}{74} \simeq 0,27}$$

19. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 οι τιμές μιας μεταβλητής X με:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$$

Αν οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i δίνονται από τη σχέση:

$$F_i = \frac{10i - 5}{5 \cdot \kappa}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Να βρείτε τον αριθμό κ και τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

<u>Λύση:</u>

Επειδή $F_5 = 1$, θα πρέπει:

$$\frac{10 \cdot 5 - 5}{5 \cdot \kappa} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 45 = 5 \cdot \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\kappa = 9}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f_1 = F_1 = \frac{10 \cdot 1 - 5}{45} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

$$f_2 = F_2 - F_1 = \frac{15}{45} - \frac{5}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$f_3 = F_3 - F_2 = \frac{25}{45} - \frac{15}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$f_4 = F_4 - F_3 = \frac{35}{45} - \frac{25}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$f_5 = F_5 - F_4 = 1 - \frac{35}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

Επειδή:

$$F_i = F_{i-1} + f_i$$

για $i = 2, \ldots, \kappa$ έχουμε:

$$f_i = F_i - F_{i-1}$$

20. Μια μεταβλητή X θεωρητικά μπορεί να πάρει τιμές στο σύνολο:

$$1, 2, 3, \ldots, 50$$

Σε ένα δείγμα 1600 ατόμων οι σχετικές συχνότητες f_i, $i = 1, 2, \ldots, 50$ των τιμών x_i, με:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{50}$$

εμφανίστηκαν με τις εξής ιδιότητες:

$$f_i = \alpha^2, \quad i = 1,2,3,4$$
$$f_i = \alpha, \quad i = 5,6,7$$
$$f_i = 0, \quad i > 7$$

α. Να βρείτε τον αριθμό α.

β. Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες $f_2, \ f_5, \ f_{10}$.

γ. Να βρείτε την συχνότητα ν_5 της τιμής x_5.

<u>Λύση:</u>

α. Θα πρέπει:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{50} = 1$$

Όμως ισχύουν:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad f_5 = f_6 = f_7 = \alpha$$

και

$$f_8 = f_9 = \ldots = f_{50} = 0$$

Άρα πρέπει:

$$4\alpha^2 + 3\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει τις λύσεις:

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \alpha = -1$$

Για $\alpha = -1$, έχουμε $f_5 = -1$ που είναι αδύνατο. Άρα:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$$

β. Για $\alpha = \frac{1}{4}$, έχουμε:

$$\boxed{f_2 = \alpha^2 = \frac{1}{16}, \quad f_5 = \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad f_{10} = 0}$$

γ. Είναι:

$$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_5 = f_5 \cdot \nu$$

Άρα:

$$\boxed{\nu_5 = \frac{1}{4} \cdot 1600 = 400}$$