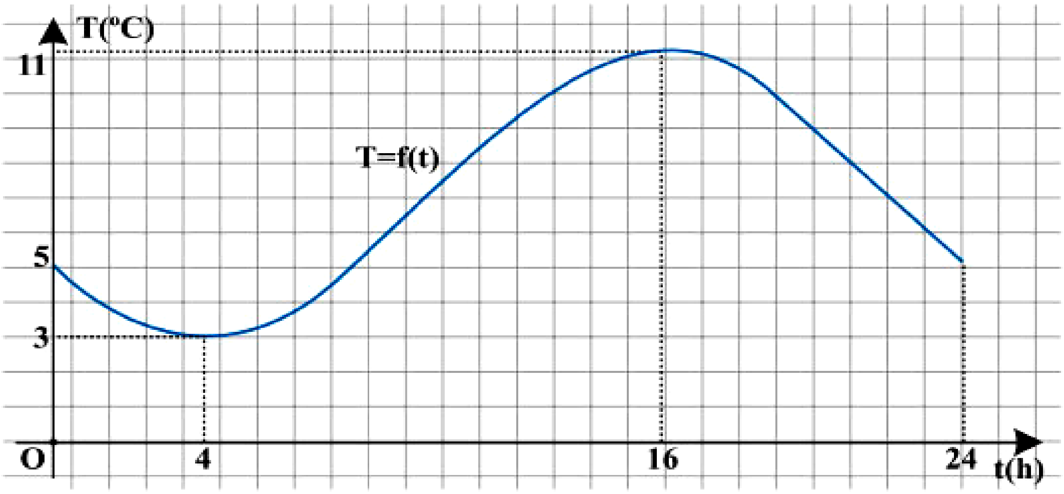
ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

Συναρτήσεις (Μονοτονία – ακρότατα – συμμετρίες)

Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Τ = f(t) που εκφράζει τη θερμοκρασία Τ ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας (t = 0) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας (t = 24).



- Οι θερμοκρασίες από τις 4 το πρωί ως τις 4 το απόγευμα …………………………….

Για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει: $f(t_1) < f(t_2)$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση Τ = f(t) είναι **γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16].**

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει*: $f(x_1) < f(x_2)$

- Οι θερμοκρασίες από τις 4 το απόγευμα ως τις 12 τα μεσάνυκτα …………………………….
- Οι τιμές της συνάρτησης στο διάστημα [16,24] ………………………….

Για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16, 24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει: $f(t_1) > f(t_2)$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση Τ = f(t) είναι **γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24].**

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει*: $f(x_1) > f(x_2)$

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Τ = f(t) .

Α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την τιμή $f(4) = \ldots$, που είναι η …………….. Δηλαδή ισχύει: $f(t) \geq f(4) = 3$, για κάθε t∈[0,24]

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση Τ = f(t) παρουσιάζει στο t = 4 **ελάχιστο,** το $f(4) = 3$.

> Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν $f(x) \geq f(x_0),\ \text{για κάθε } x \in A$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min** $\boldsymbol{f(x)}$**.**

Β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη τιμή $f(16) = \ldots$,
που είναι η ……………….. Δηλαδή ισχύει: $f(t) \leq f(16) = 11$, για κάθε t∈[0,24]

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση Τ = f(t) παρουσιάζει στο t = 16 **μέγιστο**, το $f(16) = 11$.

> Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν $f(x) \leq f(x_0),\ \text{για κάθε } x \in A$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με **max** $\boldsymbol{f(x)}$.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ: έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.
Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ: έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.
Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 5x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ: έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.
Τότε έχουμε:

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -4x - 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ: έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.
Τότε έχουμε:

……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$ παρουσιάζει ακρότατα στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Επειδή $x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα είναι $3x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

οπότε θα έχουμε $3x^4 + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 3$ παρουσιάζει ακρότατα στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Επειδή $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα είναι……………………………………………

οπότε θα έχουμε ………………………………

Επομένως ………………………………………

……………………………………………………

Άρα, η f παρουσιάζει ……………………………

……………………………………………………

4. Να εξετάσετε αν η η συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$ παρουσιάζει ακρότατα στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Επειδή $x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα είναι $-3x^4 \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

οπότε θα έχουμε $-3x^4 + 1 \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως: $f(x) \leq f(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = -4x^2 + 3$ παρουσιάζει ακρότατα στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ: Επειδή $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα είναι……………………………………………

οπότε θα έχουμε ………………………………

……………………………………………………

Επομένως ………………………………………

……………………………………………………

Άρα, η f παρουσιάζει ……………………………

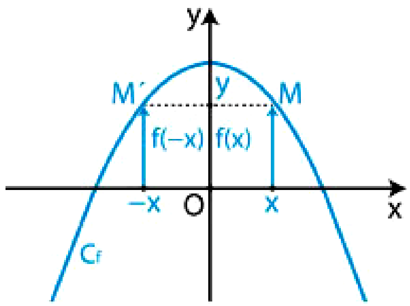
……………………………………………………

……………………………………………………

Άρτια συνάρτηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι τα σημεία Μ και Μ΄ είναι …………………
με άξονα …………………….. τον ……….. .
Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (χ, ψ) τότε το σημείο Μ΄ έχει συντεταγμένες (…, …).
Θα ισχύει $y = f(x)$ και $y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$



Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέμε λέγεται **άρτια**. Γενικά:

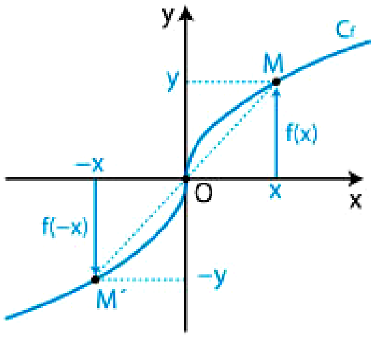
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ *και* $f(-x) = f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y 'y

Περιττή συνάρτηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ .
Παρατηρούμε ότι τα σημεία Μ και Μ΄ είναι …………………….. με κέντρο …………………….. την αρχή των αξόνων ……….. .
Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (χ, ψ) τότε το σημείο Μ΄ έχει συντεταγμένες (…, …).
θα ισχύει y = f(x) και -y = f(-x), οπότε θα έχουμε:

f(-x) = -f(x)



Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή**. Γενικά :

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε x∈A ισχύει: $-x \in A \ \text{και} \ f(-x) = f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να βρείτε αν η συνάρτηση f(x) = 2x^3 - x είναι περιττή

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ και για κάθε x∈ℝ ισχύει:

f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = - f(x)

Συνεπώς η συνάρτηση είναι περιττή και η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

1. Να βρείτε αν η συνάρτηση f(x) = 3x - x^3 είναι περιττή

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ και για κάθε x∈ℝ ισχύει:

f(-x) = ………………………………………………
…………………………………………………………
Συνεπώς η συνάρτηση είναι
…………………………………………………………
…………………………………………………………
……………………………….

2. Να βρείτε αν η συνάρτηση f(x) = 2x^4 - x^2 είναι άρτια

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ και για κάθε x∈ℝ ισχύει:

f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)

Συνεπώς η συνάρτηση είναι άρτια και η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y

2. Να βρείτε αν η συνάρτηση f(x) = 3x^2 – x^6 είναι άρτια

ΛΥΣΗ Η συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ και για κάθε x∈ℝ ισχύει:

f(-x) = ………………………………………………
…………………………………………………………
Συνεπώς η συνάρτηση είναι
…………………………………………………………
…………………………………………………………
……………………………….

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΒΙΒΛΙΟΥ ΣΕΛ. 38, 39