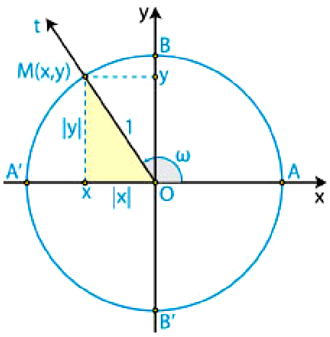
ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β’ ΕΠΑΛ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ **3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

Τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι σχέσεις που συνδέουν τριγωνομετρικούς αριθμούς μεταξύ τους και ισχύουν για κάθε γωνία ω .

1. $\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$



Απόδειξη:

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι :

$\eta\mu\omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = x$ άρα

$\eta\mu^2\omega = y^2$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega = x^2$ Επομένως:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = y^2 + x^2 = |y|^2 + |x|^2 = OM^2 = 1$$

2. $\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$

Απόδειξη:

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι :

$\eta\mu\omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = x$ και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{x}$ άρα $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

(εφόσον $\sigma\upsilon\nu\omega = x \neq 0$)

ομοίως:

$\boxed{\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$

Απόδειξη:

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι :

$\eta\mu\omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = x$ και $\sigma\varphi\omega = \dfrac{x}{y}$ άρα $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

(εφόσον $\eta\mu\omega = y \neq 0$)

3. $\boxed{\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1}$

Απόδειξη:

Στα προηγούμενα δείξαμε ότι :

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ άρα

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

(εφόσον $\eta\mu\omega = y \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = x \neq 0$)

4. $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$ και $\boxed{\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$

Η Απόδειξη παραλείπεται

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\eta\mu x = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση:

● Στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ αντικαθιστούμε $\eta\mu x = \frac{5}{13}$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{144}{169} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{12}{13}$ και επειδή $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ τότε $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{12}{13}}$

● Από τις ταυτότητες $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ έχουμε :

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

2. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση:

● Στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ αντικαθιστούμε $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$

$$\eta\mu^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \left(\frac{....}{....}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1....\frac{......}{......} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{......}{......} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \eta\mu x = \pm\sqrt{\frac{......}{.......}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm\frac{......}{......}$ και επειδή $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ τότε $\boxed{\eta\mu x = ...\frac{......}{......}}$

● Από τις ταυτότητες $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ έχουμε :

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{....\frac{.....}{......}}{....\frac{.....}{......}} = ...\frac{.....}{.....} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{....\frac{.....}{......}}{....\frac{.....}{......}} = ...\frac{.....}{.....}$$

3. Αν $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση:

● Στην ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ αντικαθιστούμε $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{12}{9}} = \frac{9}{12} \quad \text{άρα} \quad \sigma\upsilon\nu x = \pm\sqrt{\frac{9}{12}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

ή $\sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και επειδή $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ τότε $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = +\frac{\sqrt{3}}{2}}$

● Στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ αντικαθιστούμε $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{3}{9}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{12}{9}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{άρα} \quad \eta\mu x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm\frac{1}{2}$$

και επειδή $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ τότε $\boxed{\eta\mu x = -\frac{1}{2}}$

● Στην ταυτότητα $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$ αντικαθιστούμε $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\frac{3}{\sqrt{3}} \text{ ή } \sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Αν $\varepsilon\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση:

● Στην ταυτότητα αντικαθιστούμε $\varepsilon\varphi x = -2$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+(-2)^2} =$$ ....

....

....

5. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\dfrac{2}{\eta\mu\theta}$

Λύση:

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\overset{\eta\mu\theta}{\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}+\overset{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{\eta\mu^2\theta}+1+2\sigma\upsilon\nu\theta+\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}= \qquad (\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \ \eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1)$$

$$=\frac{\mathbf{1}+1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$=\frac{2\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}{\eta\mu\theta\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

6. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

Λύση: