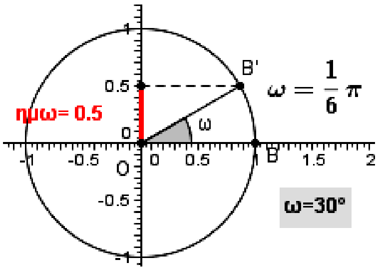
ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ **3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις**

Η εξίσωση ημx = α



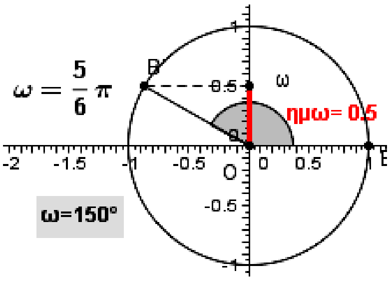
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση ημx = $\frac{1}{2}$.

Δηλαδή να βρούμε τις γωνίες εκείνες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$.

➢ Η προφανής απάντηση θα είναι x = 30^0 ή x = $\frac{\pi}{6}$

Όμως αυτή δεν είναι η μόνη σωστή απάντηση. Υπάρχουν άπειρες γωνίες που τελειώνουν στο Β΄ . Όπως η 360^0+30^0, η $2\cdot360^0+30^0$, η $3\cdot360^0+30^0$, η $3\cdot360^0+30^0$ ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$



➢ Ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$, έχει επίσης και η γωνία 180^0- 30^0 = 150^0

ή $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, όπως και όλες οι γωνίες που τελειώνουν στο Β, δηλαδή: Όπως η 360^0+180^0- 30^0, η $2\cdot360^0+180^0$- 30^0, $3\cdot360^0+180^0$ - 30^0 ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

Άρα η λύση της εξίσωσης ημx = $\frac{1}{2}$ είναι : $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

● **Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης ημx = α, αν δηλαδή ισχύει ημθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:**

$$x = 2\kappa\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \quad \text{όπου} \quad \kappa \in Z$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ επομένως $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad o\pi o\upsilon \quad \kappa \in Z$$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$\eta\mu x = \eta\mu ...... \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + ... \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - .... \end{cases} \quad \text{οπου} \quad \kappa \in Z$$

3. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ επομένως θα έχουμε:

$$\eta\mu(2x + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu .... \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + ... \\ \acute{\eta} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - .... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + ... - .... \\ \acute{\eta} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - .... - .... \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ... \\ \acute{\eta} \\ x = ... \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = ... \\ \acute{\eta} \\ x = ... \end{cases}$$

4. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

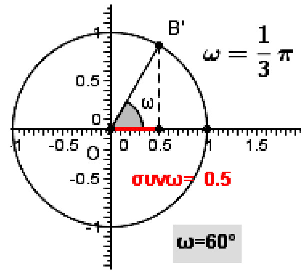
<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ επομένως $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$\eta\mu x = \eta\mu ...... \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + ... \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - .... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \quad .... \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi \quad .... \end{cases} \quad \text{οπου} \quad \kappa \in Z$$

Η εξίσωση συνx = α

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση συνx = $\frac{1}{2}$.

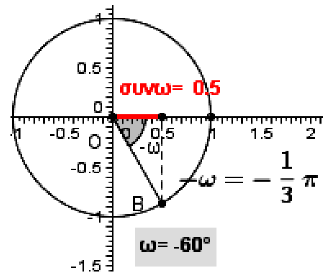


Δηλαδή να βρούμε τις γωνίες εκείνες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$.

- Η προφανής απάντηση θα είναι x = 60^0 ή x = $\frac{\pi}{3}$

Όμως αυτή δεν είναι η μόνη σωστή απάντηση. Υπάρχουν άπειρες γωνίες που τελειώνουν στο Β΄. Όπως η 360^0+60^0, η $2\cdot360^0+60^0$, η $3\cdot360^0+60^0$, η $3\cdot360^0+60^0$ ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$



- Συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$, έχει επίσης και η γωνία -60^0 ή $x = -\frac{\pi}{3}$, όπως και όλες οι γωνίες που τελειώνουν στο Β, δηλαδή: Όπως η $360^0 - 60^0$, η $2\cdot360^0 - 60^0$, η $3\cdot360^0 - 60^0$ ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$

Άρα η λύση της εξίσωσης ημx = $\frac{1}{2}$ είναι : $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$

> ● **Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης συνx = α, αν δηλαδή ισχύει συνθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:**
>
> $x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$ όπου $\kappa \in Z$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ επομένως θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad o\pi o\upsilon \quad \kappa \in Z$$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ επομένως $\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\\ \acute{\eta}\\ x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\end{cases}\quad \text{οπου}\quad \kappa\in Z$$

3. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ επομένως θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}2x=2\kappa\pi+.....\\ \acute{\eta}\\ 2x=2\kappa\pi-......\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=.........................\\ \acute{\eta}\\ x=...........................\end{cases}\quad \text{οπου}\quad \kappa\in Z$$

3. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu x=0$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$ επομένως θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu.....\Rightarrow\begin{cases}x=.........................\\ \acute{\eta}\\ x=...........................\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=.........................\\ \acute{\eta}\\ x=...........................\end{cases}\quad \text{οπου}\quad \kappa\in Z$$

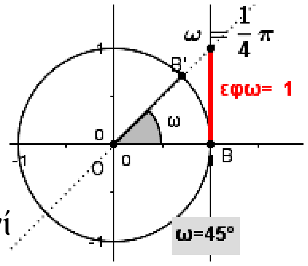
4. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ επομένως $\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu...........\Rightarrow\begin{cases}.....=..............................\\ \acute{\eta}\\ .....=..............................\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}.....=..............................\\ \acute{\eta}\\ .....=..............................\end{cases}\quad \text{οπου}\quad \kappa\in Z$$

Η εξίσωση εφx = α



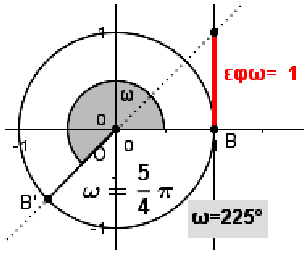
Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση εφx = 1.
Δηλαδή να βρούμε τις γωνίες εκείνες που έχουν εφαπτομένη 1.

- Η προφανής απάντηση θα είναι $x = 45^0$ ή $x = \frac{\pi}{4}$

Όμως αυτή δεν είναι η μόνη σωστή απάντηση. Υπάρχουν άπειρες γωνί
στο Β΄ . Όπως η 360^0+45^0, η $2 \cdot 360^0+45^0$, η $3 \cdot 360^0+45^0$,
η $3 \cdot 360^0+60^0$ ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

- Εφαπτομένη ίση με 1, έχει επίσης και η γωνία 180^0+45^0 ή



$x = \pi + \frac{\pi}{4}$, όπως και όλες οι γωνίες που τελειώνουν στο Β΄, δηλαδή:
Όπως η $360^0+180^0+45^0$, η $2 \cdot 360^0+180^0+45^0$,
η $3 \cdot 360^0+180^0+45^0$ ……

Όλες αυτές οι γωνίες περιγράφονται με τον τύπο $x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

Άρα η λύση της εξίσωσης εφx = 1 είναι : $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

ή μόνο με τον τύπο $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ που καλύπτει τους δύο προηγούμενους.

> ● **Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης εφx = α, αν δηλαδή ισχύει εφθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο:**
>
> $x = \kappa\pi + \theta$ όπου $\kappa \in Z$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ επομένως $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi x = -1$

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$ επομένως $\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ δηλαδή θα έχουμε:

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

3. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi x = 0$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi 0^0 = 0$ επομένως $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi ....$ $\Rightarrow$ $x = \kappa\pi + ...$

4. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi\ 3x = \sqrt{3}$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ επομένως

$\varepsilon\varphi\ 3x = \varepsilon\varphi ....$ $\Rightarrow$ $3x = \kappa\pi + ...$ $\Rightarrow$ $x = ...$

Η εξίσωση σφx = α

Ισχύουν τα ίδια όπως στην εφx

● **Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης σφx = α, αν δηλαδή ισχύει σφθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο:**

$$x = \kappa\pi + \theta \qquad \text{όπου} \quad \kappa \in \mathrm{Z}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\varphi \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ επομένως $\sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\varphi x = 1$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ επομένως $\sigma\varphi x = \sigma\varphi .....$ $\Rightarrow$ $x = \kappa\pi + ...$

3. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\varphi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ επομένως $\sigma\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ ....

....