ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ **4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**

- **Μορφή μονώνυμου :** $\alpha \cdot x^{\nu}$

  α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

  π.χ. $2x^3$, $-34x^5$, $0x^4$, $2x$

- **Μορφή πολυωνύμου :** $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$

  α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

  - Τα μονώνυμα $\alpha_\nu x^\nu$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$, …, $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου
  - οι αριθμοί α_ν, $\alpha_{\nu-1}$, …, α_1, α_0 **συντελεστές** αυτού
  - ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου

  π.χ. $3x^3 + 2x^2 - x + 2$, $0x^2 - 5x + 1$, $5x^3 - 23x^2 + 0x + 13$

- **Μηδενικό πολυώνυμο :** $0x^\nu + 0x^{\nu-1} + \ldots + 0x + 0$

  Όλοι οι συντελεστές είναι 0

  π.χ. $0x^2 - 0x + 0$ ή 0

- **Σταθερό πολυώνυμο :** $0x^\nu + 0x^{\nu-1} + \ldots + 0x + \alpha_0$

  Όλοι οι συντελεστές είναι 0 εκτός του σταθερού όρου

  π.χ. $0x^2 - 0x + 2$ ή 2, 5, $\sqrt{3}$

- **Ίσα πολυώνυμα :**

  $\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$

  όταν $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, …, $\alpha_\nu = \beta_\nu$

  και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \ldots = \alpha_\mu = 0$

  π.χ. $\nu x^3 + \mu x^2 - x + \kappa = 5x^2 - \lambda x + 2$

  όταν $\kappa = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 5$ και $\nu = 0$

- **Βαθμός πολυωνύμου :**

  Ο μεγαλύτερος εκθέτης του x που δεν έχει συντελεστή 0.

  π.χ. $3x^3 + 2x^2 - 0x + 2$, $3^{ου}$ βαθμού

  $0x^2 - 5x + 1$, $1^{ου}$ βαθμού

  13, $0^{ου}$ βαθμού

  - για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

- **Ονομασία πολυωνύμου :**

  Κάθε πολυώνυμο το συμβολίσουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα του αγγλικού αλφαβήτου και μέσα σε παρένθεση γράφουμε την μεταβλητή του.

  π.χ. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2$,

  $Q(x) = 5x^3 - 23x^2 + 0x + 13$

➢ **Αριθμητική τιμή πολυωνύμου :**

ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε σε ένα πολυώνυμο το x με ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό.

π.χ. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2$, $P(1) = 3\cdot1^3 + 2\cdot1^2 + 2 = \mathbf{7}$

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $Q(2) = 2\cdot2^3 - 3\cdot2^2 + 1 = \mathbf{5}$

➢ **Ρίζα πολυωνύμου :**

Η τιμή του x που μηδενίζει την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

π.χ. $P(x) = x^2 - 5x + 6$,

$P(\mathbf{2}) = 2^2 - 5\cdot2 + 6 = 4 - 10 + 6 = \mathbf{0}$

τότε το $x = \mathbf{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ:

- Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
- Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x

➢ Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:

- Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και
- Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

➢ **Πρόσθεση με πολυώνυμα :**

1. $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$
$= (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3)$
$= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$ [Πολυώνυμο 3ου βαθμού]

2. $(2x^3 - x^2 + 1) + (-2x^3 + 2x - 3) = 2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 + 2x - 3$
$= -x^2 + 2x - 2$ [Πολυώνυμο 2ου βαθμού]

➢ **Αφαίρεση με πολυώνυμα :**

1. $(x^3 - 3x^2 - 1) + (-x^3 + 3x^2 + 1) = x^3 - 3x^2 - 1 - x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
[Μηδενικό πολυώνυμο]

2. $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3$
$= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ [Πολυώνυμο 3ου βαθμού]

➢ **Πολλαπλασιασμός με πολυώνυμα :**

1. $(x^2 + 5x)(2x^3 + 3x - 1) = x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1)$
$= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x$
$= 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 14x^2 - 5x$ [Πολυώνυμο 5ου βαθμού]

➢ Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

- Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.
- Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

<u>Απάντηση:</u> πρέπει $\lambda^2 - 1 = 0$
και $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ η κοινή λύση είναι $\lambda = 1$
και $\lambda - 1 = 0$

2. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες τα πολυώνυμο
$Q(x) = \lambda^2x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3$ και $R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1$ είναι ίσα.

<u>Απάντηση:</u> πρέπει $\lambda^2 = 5\lambda - 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
και $\lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ η κοινή λύση είναι $\lambda = 2$
και $3 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0$

3. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in R$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4(\mu^2 - \frac{1}{4})x - 2\mu + 1$$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

<u>Απάντηση:</u> πρέπει $4\mu^3 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(4\mu^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ ……………………
και $\mu^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$ …………………………
και ……………… = 0 $\Leftrightarrow$ …………………………

η κοινή λύση είναι μ = …….

4. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες τα πολυώνυμο
$P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

<u>Απάντηση:</u> πρέπει $\alpha^2 - 3\alpha = -2 \Leftrightarrow$ ………………………………

και 1 = ………… $\Leftrightarrow$ ………………………………

και …. = ………… $\Leftrightarrow$ ………………………………

και α = ……… $\Leftrightarrow$ ………………………………

η κοινή λύση είναι α = ……..

5. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ ii) $2P(x) - 3Q(x)$ iii) $P(x)\cdot Q(x)$ iv) $[P(x)]^2$

Απάντηση:

i) $P(x) + Q(x) = (x^2 - 5x + 2) + (x^3 + 3x + 1) =$ ....

ii) $2P(x) - 3Q(x) = 2\cdot(x^2 - 5x + 2) - 3\cdot($..............................$) =$ ....

$=$ ....

iii) $P(x)\cdot Q(x) = (x^2 - 5x + 2)\cdot(x^3 + 3x + 1) =$ ....

$=$ ....

iv) $[P(x)]^2 = (x^2 - 5x + 2)^2 = (x^2 - 5x + 2)\cdot(x^2 - 5x + 2) =$ ....

$=$ ....

6. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.:

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$, $x = -1$, $x = 1$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ $x = -1$, $x = 1$ $x = 3$.

Απάντηση:

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ τότε :

$P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 7 = -2 - 3 - 2 + 7 = 0$ το $x = -1$ είναι ρίζα του $P(x)$

$P(1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 7 = 2 - 3 + 2 + 7 = 8$ το $x = 1$ δεν είναι ρίζα του $P(x)$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ τότε :

$Q(-1) = -(-1)^4 + 1 =$ .... το $x = -1$ .... ρίζα του $P(x)$

$Q(1) = -1^4 + 1 =$ .... το $x = 1$ .... ρίζα του $P(x)$

$Q(3) = -3^4 + 1 =$ .... το $x = 1$ .... ρίζα του $P(x)$

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in R$, το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k$

Απάντηση:

Για να είναι το 2 ρίζα του $P(x)$ πρέπει το $P(2) = 0$. Δηλαδή

....

....

....