

# ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου: Διαιρετέος  $\Delta(x)$  πολυώνυμο  
δαιρέτης  $\delta(x)$  πολυώνυμο  $\neq 0$   
πηλίκιο  $\pi(x)$  πολυώνυμο  
υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  πολυώνυμο μηδενικό ή με βαθμό μικρότερο του  $\delta(x)$

π.χ.  $x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 4) + (-13)$   
(διαιρετέος) = (δαιρέτης) · (πηλίκιο) + (υπόλοιπο)

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Είναι δηλαδή  $\upsilon = P(\rho)$

## Απόδειξη:

- Ταυτότητα διαίρεσης του  $P(x)$  με  $x - \rho$  :  $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$
- Επειδή το  $x - \rho$  είναι 1<sup>ου</sup> βαθμού, το  $\upsilon(x)$  θα είναι μηδενικού άρα :  $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon$
- Αν θέσουμε  $x = \rho$  θα έχουμε :  $P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \underline{\upsilon}$

π.χ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$  με το  $x - 2$  είναι ίσο με  $\upsilon = P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 - 15 = -21$

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$ .

## Διπλή απόδειξη: (ορθό & αντίστροφο)

- **Ορθό:** το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$   $\Rightarrow$  το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$   
το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho \Rightarrow P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$   
και θέτοντας όπου  $x = \rho$  θα έχουμε  $P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) = \underline{0}$   
δηλαδή το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .
- **Αντίστροφο:** το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$   $\Rightarrow$  το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$   
το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x) \Rightarrow P(\rho) = 0$   
όμως επειδή  $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + \upsilon$  και  $\upsilon = P(\rho)$  και  $P(\rho) = 0$   
θα είναι  $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + 0$  ή  $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$   
άρα το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης :  $(18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2) : (x + 1)$ .

Απάντηση:

Επειδή γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Είναι δηλαδή  $u = P(\rho)$

Θα είναι:

$$u = P(-1) = 18(-1)^{80} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{20} - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$$

2) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης :  $(20x^{50} - 5x^{20} + 4x^{10} - 3) : (x - 1)$ .

Απάντηση:

.....

.....

.....

3) Να βρείτε τις τιμές του  $k$ , για τις οποίες το  $x - 1$  είναι παράγοντας του  $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$ .

Απάντηση:

Επειδή γνωρίζουμε ότι το  $g(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$   $\Rightarrow$  το 1 είναι ρίζα του  $g(x)$

Θα είναι:

$$g(1) = 0 \Rightarrow k^2 \cdot 1^4 + 3k \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$$

βρίσκουμε την  $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$$\text{και τις ρίζες } k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow & = 1 \\ \searrow & = -4 \end{cases} \quad \text{άρα } k = 1 \text{ ή } k = -4$$

4) Να βρείτε τις τιμές του  $\mu$ , για τις οποίες το  $x - 2$  είναι παράγοντας του  $P(x) = 2x^4 - 3\mu x^2 + \mu^2 + 4$ .

Απάντηση:

Επειδή γνωρίζουμε ότι το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 2$   $\Rightarrow$  το 2 είναι ρίζα του  $P(x)$

Θα είναι:

$$P(2) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

.....

5) Να δείξετε ότι το  $x + 3$  είναι παράγοντας του  $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$ .

Απάντηση:

Για να έχει το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x + 3$  πρέπει το  $-3$  να είναι ρίζα του  $P(x)$   
δηλαδή:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

άρα  $\dots\dots\dots$

6) Να δείξετε ότι το  $x - \frac{1}{4}$  είναι παράγοντας του  $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$ .

Απάντηση:

Για να έχει το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \frac{1}{4}$  πρέπει το  $\frac{1}{4}$  να είναι ρίζα του  $P(x)$

δηλαδή:

$$P\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

άρα  $\dots\dots\dots$

7) Να δείξετε ότι το  $x - 2$  και το  $x + 1$  είναι παράγοντες του

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6.$$

Απάντηση:

Για να έχει το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 2$  πρέπει το  $2$  να είναι ρίζα του  $P(x)$   
δηλαδή:

$$P(2) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

επίσης

Για να έχει το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x + 1$  πρέπει το  $-1$  να είναι ρίζα του  $P(x)$   
δηλαδή:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

άρα  $\dots\dots\dots$

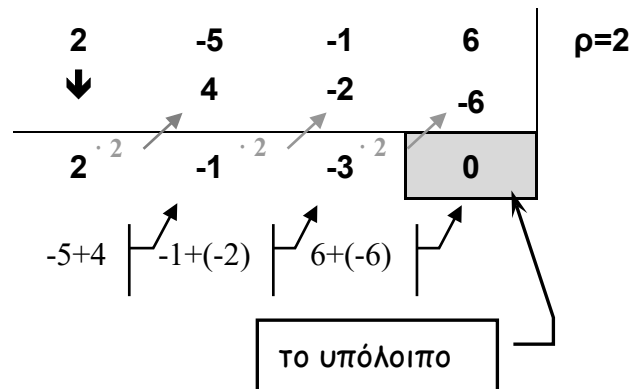
## ΣΧΗΜΑ HORNER (Χόρνερ)

Χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας διαίρεσης πολυωνύμου με διαιρέτη της μορφής  $x - \rho$ .

π.χ.  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$  με το  $x - 2$ .

Γράφουμε τους συντελεστές του  $P(x)$  →

συντελεστές του πηλίκου  $\pi(x)$  →



Συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του  $x$  που δεν υπάρχουν.

Επομένως :  $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x - 2) \cdot (2x^2 - 1x - 3) + 0$   
 (δαιρετέος) = (δαιρέτης)·(πηλίκο) + (υπόλοιπο)

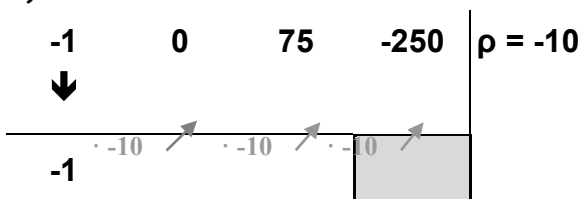
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

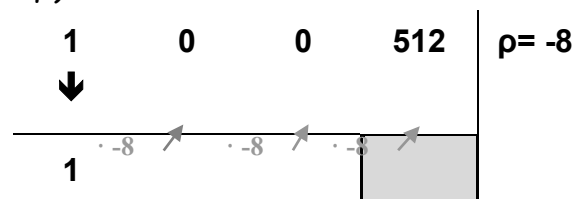
α)  $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$ .    β)  $(x^3 + 512) : (x + 8)$     γ)  $-3x^4 : (x - 2)$

Απάντηση:

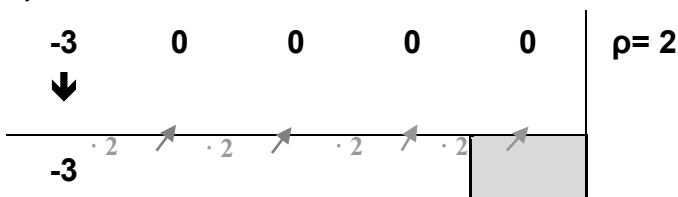
α)



β)



γ)



Άρα  $-x^3 + 75x - 250 = (x + 10) \cdot (\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots$

και  $x^3 + 512 = (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots$

και  $-3x^4 = (\dots\dots\dots) \cdot (\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots$