ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ **4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**

<u>Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης</u>

$$\boxed{\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)}$$

όπου: Διαιρετέος $\Delta(x)$ πολυώνυμο
διαιρέτης $\delta(x)$ πολυώνυμο $\neq 0$
πηλίκο $\pi(x)$ πολυώνυμο
υπόλοιπο $\upsilon(x)$ πολυώνυμο μηδενικό ή με βαθμό μικρότερο του $\delta(x)$

π.χ. $x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x - 3)\cdot(x^2 - 2x - 4) + (-13)$
(διαιρετέος) = (διαιρέτης)·(πηλίκο) + (υπόλοιπο)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$

<u>Απόδειξη:</u>

- Ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με $x-\rho$: $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$
- Επειδή το $x-\rho$ είναι 1ου βαθμού,
  το $\upsilon(x)$ θα είναι μηδενικού άρα : $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x) + \upsilon$
- Αν θέσουμε $x = \rho$ θα έχουμε : $\underline{P(\rho)} = (\rho - \rho)\cdot\pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \underline{\upsilon}$

π.χ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ με το $x - 2$
είναι ίσο με $\upsilon = P(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 - 13\cdot 2 - 15 = -21$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

<u>Διπλή απόδειξη:</u> (ορθό & αντίστροφο)

- **Ορθό:** <u>το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$</u> $\Rightarrow$ <u>το ρ είναι ρίζα του $P(x)$</u>

το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ $\Rightarrow$ $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x)$
και θέτοντας όπου $x = \rho$ θα έχουμε $\underline{P(\rho)} = (\rho - \rho)\cdot\pi(\rho) = \underline{0}$
δηλαδή το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

- **Αντίστροφο:** <u>το ρ είναι ρίζα του $P(x)$</u> $\Rightarrow$ <u>το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$</u>

το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ $\Rightarrow$ $P(\rho) = 0$
όμως επειδή $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x) + \upsilon$ και $\upsilon = P(\rho)$ και $P(\rho) = 0$
θα είναι $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x) + 0$ ή $P(x) = (x - \rho)\cdot\pi(x)$
άρα το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(18x^{80} - 6x^{50} + 4x^{20} - 2) : (x + 1)$.

<u>Απάντηση</u>:

Επειδή γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$
θα είναι:

$$\upsilon = P(-1) = 18(-1)^{80} - 6(-1)^{50} + 4(-1)^{20} - 2 = 18 - 6 + 4 - 2 = 14$$

2) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(20x^{50} - 5x^{20} + 4x^{10} - 3) : (x - 1)$.

<u>Απάντηση</u>:

....

....

....

3) Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το $x - 1$ είναι παράγοντας του
$g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

<u>Απάντηση</u>:

Επειδή γνωρίζουμε ότι <u>το $g(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$</u> $\Rightarrow$ <u>το 1 είναι ρίζα του $g(x)$</u>
θα είναι:

$$g(1) = 0 \Rightarrow k^2 \cdot 1^4 + 3k \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$$

βρίσκουμε την $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

και τις ρίζες $k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow = 1 \\ \searrow = -4 \end{cases}$ άρα $k = 1$ ή $k = -4$

4) Να βρείτε τις τιμές του μ, για τις οποίες το $x - 2$ είναι παράγοντας του
$P(x) = 2x^4 - 3\mu x^2 + \mu^2 + 4$.

<u>Απάντηση</u>:

Επειδή γνωρίζουμε ότι <u>το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$</u> $\Rightarrow$ <u>το 2 είναι ρίζα του $P(x)$</u>
θα είναι:

$P(2) = 0 \Rightarrow$ ....

....

5) Να δείξετε ότι το $x + 3$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$.

Απάντηση:

Για να έχει το P(x) έχει παράγοντα το x + 3 πρέπει το -3 να είναι ρίζα του P(x) δηλαδή:

$P(-3) = 0 \Rightarrow$ ....

....

άρα ....

6) Να δείξετε ότι το $x - \frac{1}{4}$ είναι παράγοντας του $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$.

Απάντηση:

Για να έχει το P(x) έχει παράγοντα το $x - \frac{1}{4}$ πρέπει το $\frac{1}{4}$ να είναι ρίζα του P(x)

δηλαδή:

$P(\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow$ ....

....

άρα ....

7) Να δείξετε ότι το $x - 2$ και το $x + 1$ είναι παράγοντες του

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

Απάντηση:

Για να έχει το P(x) έχει παράγοντα το x - 2 πρέπει το 2 να είναι ρίζα του P(x) δηλαδή:

$P(2) = 0 \Rightarrow$ ....

....

επίσης
Για να έχει το P(x) έχει παράγοντα το x + 1 πρέπει το -1 να είναι ρίζα του P(x) δηλαδή:

$P(-1) = 0 \Rightarrow$ ....

....

άρα ....

ΣΧΗΜΑ HORNER (Χόρνερ)

Χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας διαίρεσης πολυωνύμου με διαιρέτη της μορφής $x - \rho$.

π.χ. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ με το $x - 2$.

Γράφουμε τους συντελεστές του P(x) ➔	**2**	**-5**	**-1**	**6**	**ρ=2**
	⬇	**4**	**-2**	**-6**	
συντελεστές του πηλίκου π(x) ➔	**2** · 2	**-1** · 2	**-3** · 2	$\boxed{\mathbf{0}}$	
		-5+4	-1+(-2)	6+(-6)	

το υπόλοιπο

Συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.

Επομένως : $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x - 2)\cdot(2x^2 - 1x - 3) + 0$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης)·(πηλίκο) + (υπόλοιπο)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(-x^3 + 75x - 250) : (x + 10)$. β) $(x^3 + 512) : (x + 8)$ γ) $-3x^4 : (x - 2)$

<u>Απάντηση</u>:

α)

-1	**0**	**75**	**-250**	**ρ = -10**
⬇				
-1 · -10	· -10	· -10	$\boxed{}$	

β)

1	**0**	**0**	**512**	**ρ= -8**
⬇				
1 · -8	· -8	· -8	$\boxed{}$	

γ)

-3	**0**	**0**	**0**	**0**	**ρ= 2**
⬇					
-3 · 2	· 2	· 2	· 2	$\boxed{}$	

Άρα $-x^3 + 75x - 250 = (x + 10)\cdot($ ………………………….$)$ + …………….

και $x^3 + 512 = ($……………..$)\cdot($ ………………………….$)$ + …………….

και $-3x^4 = ($……………..$)\cdot($ ………………………………….$)$ + …………….