ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β’ ΕΠΑΛ

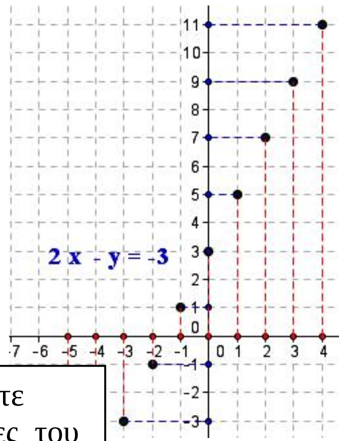
Συστήματα εξισώσεων 2x2

Η εξίσωση : $αx + βy = γ$

Γενικά , λύση μιας εξίσωσης $αx + βy = γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

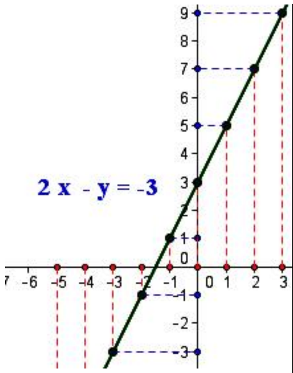
Η εξίσωση όμως $αx + βy = γ$ δεν έχει λύση μόνο ένα ζεύγος, αλλά έχει άπειρες λύσεις.

Αν σ’ ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης , παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ε.



ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19



Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση **$αx + βy = γ$**.

Άρα κάθε σημείο της ευθείας ε έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης.

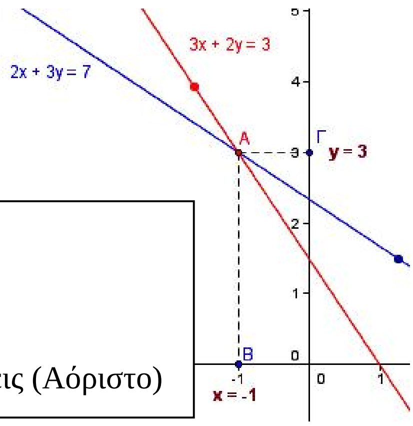
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $αx + βy = γ$ παριστάνει την ευθεία ε και γράφουμε :

(ε) : $αx + βy = γ$. Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο

Γραμμικό σύστημα 2x2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις **$αx + βy = γ$** και **$α΄x + β΄y = γ΄$** και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους , τότε έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

Δηλαδή, ζητάμε τις συντεταγμένες του σημείου εκείνου στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες .



Παρατήρηση

Υπάρχουν όμως οι εξής περιπτώσεις :

- Οι ευθείες να τέμνονται : 1 κοινό σημείο - 1 λύση (x,y)
- Οι ευθείες να είναι παράλληλες : κανένα κοινό σημείο – καμιά λύση (Αδύνατο)
- Οι ευθείες να ταυτίζονται : άπειρα κοινά σημεία - άπειρες λύσεις (Αόριστο)

Τρόποι επίλυσης Γραμμικού συστήματος 2x2

Εκτός από την γραφική μέθοδο για την επίλυση του συστήματος, που είδαμε παραπάνω έχουμε και τις εξής μεθόδους:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής :

1. Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο .
2. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
3. Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο
4. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος
5. Επαληθεύουμε τη λύση

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 4(5-2y)+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 20-8y+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ -7y=6-20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2\cdot 2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$ Αρα (x,y)=(1,2)

Για x=1 ,y=2 : $\begin{cases} 1+2\cdot 2=5 \\ 4\cdot 1+2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5 \\ 6=6 \end{cases}$ ισχύουν

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Η μέθοδος στοχεύει στην απαλοιφή ενός αγνώστου από μια εξίσωση . Παράδειγμα :

1. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
2. Για να απαλείψουμε το x , πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 5 και της δεύτερης με το (-4) , οπότε έχουμε:
3. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο (γραμμικός συνδυασμός) , την οποία και λύνουμε.
4. Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου
5. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 5x+7y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5\cdot \\ -4\cdot \end{matrix}\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 5x+7y=17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x+15y=55 \\ -20x-28y=-68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y=11 \\ -13y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y=11 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3\cdot 1=11 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=8 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Άρα (x , y) = (2,1)

(…. και επαληθεύουμε)

Τις δύο παραπάνω μεθόδους τις συναντήσαμε ξανά στο Γυμνάσιο. Την φετινή χρονιά θα μάθουμε και μία ακόμη μέθοδο, την μέθοδο των οριζουσών.

γ) Μέθοδος των οριζουσών.

Έστω το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: $\begin{cases} \sim x + \quad y = ¥ \\ \sim' x + \quad ' y = ¥' \end{cases}$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με την μέθοδο των οριζουσών ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D = \begin{vmatrix} \sim & \\ \sim' & , \end{vmatrix} = \sim \cdot \quad ' - \quad \cdot \sim'$

2. Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x = \begin{vmatrix} ¥ & \\ ¥' & , \end{vmatrix} = ¥ \cdot \quad ' - \quad \cdot ¥'$

(Προκύπτει από την D αντικαθιστώντας τους συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους)

3. Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y = \begin{vmatrix} \sim & ¥ \\ \sim' & ¥' \end{vmatrix} = \sim \cdot ¥' - ¥ \cdot \sim'$

(Προκύπτει από την D αντικαθιστώντας τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους)

Αφού υπολογιστούν οι ορίζουσες D , Dx , Dy τότε:

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση , την : $x = \frac{Dx}{D}, \quad y = \frac{Dy}{D}$
- Αν D = 0 , τότε το σύστημα είναι αδύνατο , είτε έχει άπειρες λύσεις . Το διαπιστώνουμε αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου στο σύστημα .

Αποδεικνύεται ότι :

- *Αν D = 0 και (Dx ≠ 0 ή Dy ≠ 0), το σύστημα είναι αδύνατο .*
- *Αν D = Dχ = Dy = 0, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, εκτός αν α = α΄= β = β΄=0 και γ≠ 0 ή γ΄≠ 0, οπότε είναι αδύνατο.*

Παράδειγμα :

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13$

Άρα $x = \frac{Dx}{D} = \frac{-39}{-13} = 3, \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-13}{-13} = 1$

Για εξάσκηση :

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=.....\cdot......-.....\cdot.....=..............=.........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=...............=........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=............=.......$

Άρα $x=\frac{Dx}{D}=\frac{.....}{.....}=......,\qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{......}{......}=......$

---

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ x+3y=7 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot......-.....\cdot.....=..............=.........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=...............=........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=............=.......$

Άρα $x=\frac{Dx}{D}=\frac{.....}{.....}=......,\qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{......}{......}=......$

---

3. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} -x+2y=4 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot......-.....\cdot.....=..............=.........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=...............=........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{vmatrix}=.....\cdot.....-.....\cdot......=............=.......$

Άρα $x=\frac{Dx}{D}=\frac{.....}{.....}=......,\qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{......}{......}=......$

Μία περίπτωση που το σύστημα είναι Αδύνατο

➢ Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 1=4-4=0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=7\cdot 2-4\cdot 1=14-4=10\neq 0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-4\cdot 7=8-28=-20\neq 0$

Άρα το σύστημα είναι Αδύνατο. (Δεν μπορώ να κάνω τη διαίρεση $x=\frac{Dx}{D}$, $y=\frac{Dy}{D}$)

Μία περίπτωση που το σύστημα είναι Αόριστο

➢ Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 1=4-4=0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-6\cdot 1=6-6=0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-4\cdot 3=12-12=0$

Άρα το σύστημα είναι Αόριστο ή έχει άπειρες λύσεις …

➢ **Παρατήρηση:** Αυτό δεν σημαίνει ότι το x και το y μπορούν να είναι οποιδήποτε αριθμοί. Πρέπει να βρούμε την μορφή των άπειρων αυτών λύσεων.

Διαλέγω μία από τις δύο εξισώσεις (συνήθως την πιο απλή) και θέτω όπου χ έναν πραγματικό αριθμό ρ, μετά την λύνω ως προς y και βρίσκω τα ζεύγη των απείρων λύσεων.

διαλέγω την εξίσωση : $2x+y=3$ θέτω $x=^{\circ}$ και την λύνω ως προς y:
$y=3-2x \Rightarrow y=3-2^{\circ}$
Άρα η μορφή των άπειρων λύσεων είναι: $x=^{\circ}$ και $y=3-2^{\circ}$

Διερεύνηση - Λύση συστήματος με παράμετρο.

Όταν θέλουμε να λύσουμε ένα σύστημα όπου κάποιοι απ΄τους συντελεστές περιέχουν παράμετρο , τότε φέρνουμε το σύστημα στην κανονική μορφή και ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y και προσπαθούμε να τις παραγοντοποιήσουμε.
- Βρίσκουμε τις τιμές τις παραμέτρου οι οποίες μηδενίζουν την ορίζουσα D.
- Παίρνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου , δηλαδή :

Παίρνουμε πρώτη περίπτωση η τιμή της παραμέτρου να είναι διαφορετική από τις τιμές που μηδενίζουν την D . Τότε έχουμε μοναδική λύση την $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

Έπειτα παίρνουμε χωριστές περιπτώσεις για κάθε τιμή της παραμέτρου που μηδενίζει την ορίζουσα D . Αντικαθιστούμε αυτές τις τιμές και λύνουμε το σύστημα. Αυτό θα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) ή θα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα :

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x + \text{ª}\, y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D = \begin{vmatrix} 2 & \text{ª} \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - 3\cdot \text{ª} = -10 - 3\text{ª}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x = \begin{vmatrix} 7 & \text{ª} \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 7\cdot(-5) - 4\cdot \text{ª} = -35 - 4\text{ª}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 7 = 8 - 21 = -13$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) $D \neq 0$ δηλαδή $-10 - 3\text{ª} \neq 0 \Rightarrow -3\text{ª} \neq 10 \Rightarrow \text{ª} \neq -\dfrac{10}{3}$

τότε $x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-35 - 4\text{ª}}{-10 - 3\text{ª}}$, $\quad y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-13}{-10 - 3\text{ª}}$

Β) $D = 0$ δηλαδή $-10 - 3\text{ª} = 0 \Rightarrow -3\text{ª} = 10 \Rightarrow \text{ª} = -\dfrac{10}{3}$

τότε $D = -10 - 3\text{ª} = -10 - 3\left(-\dfrac{10}{3}\right) = -10 + 10 = 0$

$$D_x = -35 - 4(-\frac{10}{3}) = -35 + \frac{40}{3} = -\frac{105}{3} + \frac{40}{3} = -\frac{65}{3} \neq 0$$

Άρα το σύστημα είναι Αδύνατο.

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+1y=\lambda \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-\lambda\cdot\lambda=1-\lambda^2=(1-\lambda)(1+\lambda)$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-\lambda\cdot\lambda=1-\lambda^2=(1-\lambda)(1+\lambda)$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=1\cdot\lambda-1\cdot\lambda=\lambda-\lambda=0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) $D\neq 0$ δηλαδή $(1-\lambda)(1+\lambda)\neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1-\lambda\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq 1 \\ 1+\lambda\neq 0 \Rightarrow \lambda\neq -1 \end{matrix}$

τότε $x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)}=1,\qquad y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{0}{(1-\lambda)(1+\lambda)}=0$

μοναδική λύση : $(\mathrm{x},\mathrm{y})=(1,0)$

Β) $D=0$ δηλαδή $(1-\lambda)(1+\lambda)=0 \Rightarrow$ ή $\begin{matrix} 1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \\ 1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \end{matrix}$

i) τότε για λ=1 : $D=(1-1)(1+1)=0\cdot 2=0$
$Dx=(1-1)(1+1)=0\cdot 2=0$
$Dy=0$

Άρα το σύστημα είναι Αόριστο ή έχει άπειρες λύσεις ...
διαλέγω την εξίσωση : $\lambda x+y=\lambda$ θέτω $x=\circ$ και $\lambda=1$ και την λύνω ως προς y:
$y=\lambda-\lambda x \Rightarrow y=1-1\circ \Rightarrow y=1-\circ$
Άρα η μορφή των άπειρων λύσεων είναι: $x=\circ$ και $y=1-\circ$

ii) τότε για λ=-1 : $D=(1+1)(1-1)=2\cdot 0=0$
$Dx=(1+1)(1-1)=2\cdot 0=0$
$Dy=0$

Άρα το σύστημα είναι Αόριστο ή έχει άπειρες λύσεις ...
διαλέγω την εξίσωση : $\lambda x+y=\lambda$ θέτω $x=\circ$ και $\lambda=-1$ και την λύνω ως προς y:
$y=\lambda-\lambda x \Rightarrow y=-1+1\circ \Rightarrow y=-1+\circ$
Άρα η μορφή των άπειρων λύσεων είναι: $x=\circ$ και $y=-1+\circ$

<u>Για εξάσκηση :</u>

Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+«y=« \\ «x+y=1 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}=\ldots\ldots\ldots$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}=\ldots\ldots\ldots$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}=\ldots\ldots\ldots$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) $D\neq 0$ δηλαδή ………

Β) $D=0$ δηλαδή ………

Συστήματα εξισώσεων 3x3

Θεωρούμε ένα σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους στη γενική του μορφή :

$$\begin{cases} \alpha_1\chi + \beta_1 y + \gamma_1\omega = \delta_1 & (1) \\ \alpha_2\chi + \beta_2 y + \gamma_2\omega = \delta_2 & (2) \\ \alpha_3\chi + \beta_3 y + \gamma_3\omega = \delta_3 & (3) \end{cases}$$

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε μία εξίσωση ως προς ένα άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις άλλες δύο εξισώσεις, απ' όπου βρίσκονται οι δύο άγνωστοι . Μπορούμε επίσης να βρούμε από τις δύο εξισώσεις τους δύο αγνώστους ως συνάρτηση του τρίτου αγνώστου και να τους αντικαταστήσουμε στην άλλη εξίσωση .

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x+y+z=4 \\ -x-2y+2z=6 \\ 2x+3y+z=4 \end{cases}$

Απάντηση :

Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς z : $x+y+z=4 \Rightarrow z=4-x-y$

και αντικαθιστώ στις άλλες δύο :

$$\begin{cases} -x-2y+2z=6 \\ 2x+3y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y+2(4-x-y)=6 \\ 2x+3y+(4-x-y)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y+8-2x-2y=6 \\ 2x+3y+4-x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-4y=-2 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

Λύνω το σύστημα 2x2

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)-1\cdot(-4) = -6+4 = -2 \neq 0$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $D_x=\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)-(-4)\cdot 0 = -4+0 = -4$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $D_y=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 0-(-2)\cdot 1 = 0+2 = 2$

Άρα $x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{-4}{-2}=2, \quad y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{2}{-2}=-1$

τις τιμές του x και y που βρήκα αντικαθιστώ στην πρώτη εξίσωση :

$$x+y+z=4 \Rightarrow z=4-x-y \Rightarrow z=4-2-(-1) \Rightarrow z=4-2+1 \Rightarrow z=3$$

Άρα έχω μοναδική λύση : $(x,y,z)=(2,-1,3)$

Για εξάσκηση :

Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=3 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$

Απάντηση :

Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς z : $x-y+z=1 \Rightarrow z=$.................

και αντικαθιστώ στις άλλες δύο :

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ -x+y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-(....................)=3 \\ -x+y+(....................)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} .... \\ .... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} .... \\ .... \end{cases}$$

Λύνω το σύστημα 2x2

Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D=\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}=.........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : $Dx=\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}=.........$

Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: $Dy=\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}=.........$

Άρα $x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{....}{....}=....,\qquad y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{....}{....}=....$

τις τιμές του x και y που βρήκα αντικαθιστώ στην πρώτη εξίσωση :

$x-y+z=1 \;\Rightarrow\; z=................. \;\Rightarrow\; z=................. \;\Rightarrow\; z=....$

Άρα έχω μοναδική λύση : $(x,y,z)=(....\ ,\ ....\ ,\ ....)$

Μη Γραμμικά Συστήματα εξισώσεων 2x2

Μέθοδοι επίλυσης

α) Ένας περίπου γενικός τρόπος λύσης είναι να λύνουμε την πιο εύκολη (την πρωτοβάθμια ή εκείνη που παραγοντοποιείται) ως προς ένα άγνωστο και έπειτα να αντικαθιστούμε στην άλλη .
β) Η χρήση των τύπων Vieta . Από τις δοσμένες εξισώσεις υπολογίζουμε τα x+y=S , xy=P και σχηματίζουμε το τριώνυμο $\omega^2 - S\omega + P = 0$. Οι λύσεις του είναι οι τιμές των x, y (2 ζεύγη λύσεων)
γ) Σχηματισμός ταυτοτήτων
δ) Προσθέτουμε ή αφαιρούμε κατά μέλη , ώστε να σχηματισθεί μια απλούστερη εξίσωση .

Παράδειγμα:

1. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$

Απάντηση :

Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς y : $x+y=5 \;\Rightarrow\; y=5-x$
και αντικαθιστώ την τιμή αυτή στη δεύτερη :
$x\cdot y=6 \;\Rightarrow\; x\cdot(5-x)=6 \;\Rightarrow\; 5x-x^2=6 \;\Rightarrow\; -x^2+5x-6=0$

καταλήγω σε τριώνυμο με $\Delta = \ ^2 - 4\sim¥ = 5^2-4(-1)(-6)=25-24=1$

και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{- \ \pm\sqrt{\Delta}}{2\sim} = \dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{2(-1)} = \dfrac{-5\pm 1}{-2} =$ $\nearrow \dfrac{-5+1}{-2} = \dfrac{-4}{-2}$ = 2 , $\searrow \dfrac{-5-1}{-2} = \dfrac{-6}{-2}$ = 3

Άρα για $x=2$ η πρώτη γίνεται : $y=5-x \;\Rightarrow\; y=5-2 \;\Rightarrow\; y=3$ και
για $x=3$ η πρώτη γίνεται : $y=5-x \;\Rightarrow\; y=5-3 \;\Rightarrow\; y=2$

Επομένως έχω δύο ζεύγη λύσεων : $(x,y)=(2,3)$ και $(x,y)=(3,2)$

__Για εξάσκηση :__

1. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{cases}$

Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς y : $x+y=5 \;\Rightarrow\; y=........$
και αντικαθιστώ την τιμή αυτή στη δεύτερη :
$x\cdot y=4 \;\Rightarrow\; x\cdot(.........)=4 \;\Rightarrow\; .... \;\Rightarrow\; ....=0$
καταλήγω σε τριώνυμο με $\Delta = \ ^2 - 4\sim¥ = ...$

και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{- \ \pm\sqrt{\Delta}}{2\sim} = \dfrac{....\pm\sqrt{....}}{2.....} = ...$

Άρα για $x=.....$ η πρώτη γίνεται : $y=.......... \;\Rightarrow\; y=........\Rightarrow\; y=....$ και
για $x=.....$ η πρώτη γίνεται : $y=.......... \;\Rightarrow\; y=........\Rightarrow\; y=....$
Επομένως έχω δύο ζεύγη λύσεων : $(x,y)=(2,3)$ και $(x,y)=(3,2)$