

2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $F=c \cdot f(x)$. Να αποδείξετε ότι $F'(x)=c \cdot f'(x)$.

Μονάδες 7

A2. α) Τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;

β) Πότε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο Δ , είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ ;

Μονάδες 8

A3. α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **ΣΩΣΤΕΣ** (Σ) ή **ΛΑΘΟΣ** (Λ):

1) Για να εμφανίζει μια συνάρτηση f ακρότατο στο (α, β) αρκεί να υπάρχει κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, για το οποίο $f'(x_0)=0$.

2) Για f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x)}{g^2(x)}$$
.

3) Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για αυτές ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

4) Ισχύει ότι $(2016^{2017})' = 2017 \cdot 2016^{2016}$.

5) Πάντα ένα τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 5 x 2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=2x^2-5x+3$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τα x_1 και $x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $f(x) + f'(x) + 4 = x^2 + f''(x)$

Μονάδες 7

B3. Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , στα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq 9x + 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = -1 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, & x \neq -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

Για $x \geq -1$:

Γ3. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \beta x^2 + \alpha x + \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Για την f ισχύουν τα εξής:

- η γραφική της παράσταση τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4.
- η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και ότι $\beta=1$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν η f είναι η παράγωγος συνάρτησης F να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία, και να συγκρίνετε τις τιμές $-F(1926)$, $-F(2016)$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η $F''(x)$ δεν εμφανίζει ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{F'(x)}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) - \lim_{x \rightarrow 1} F''(x) = 0$.

Μονάδες 8

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΥΟΜΙΣΗ (2,5) ΩΡΕΣ
ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ