Ονοματεπώνυμο: ____

Βαθμός: ____

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη να αποδείξετε ότι

$$F'(x) = c \cdot f'(x)$$

Α2. α. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει στο (α,β) για $x = x_0$ μέγιστο;

β. Να γράψετε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

1. Αν f, g παραγωγίσιμες και ορίζεται η $\frac{f}{g}$, τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$.
2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο x_0 είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.
3. Ισχύει πάντα ότι $\lim\limits_{x \to x_0}$ εφ$x =$ εφx_0.
4. Το πεδίο ορισμού της f' είναι πάντα το ίδιο με το πεδίο ορισμού της f.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται οι συναρτήσεις $f,\ g$ με:

- $f(x) = x^2 - 6 \cdot x + 5$ με $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$

Β1. Να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία οι C_f C_g, τέμνουν τον άξονα $x'x$.

Β2. Να ορίσετε την φ$(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Β3. Να υπολογίσετε τα α$=\lim\limits_{x \to 1}$ φ(x) και β$=\lim\limits_{x \to 5}$ φ(x).

Β4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_φ$ που να σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f,\ g$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x^2-7\cdot x-8}, & x \neq 8 \\ \\ \dfrac{\alpha+\beta-5}{54}, & x = 8 \end{cases}$
- $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-x^3+2\cdot x^2-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha\cdot\beta, & x = 1 \end{cases}$

Γ1. Να υπολογίσετε τα α, β με α > β.

Γ2. Να αποδείξετε ότι για $x \neq 1$ η $g(x)$ μετασχηματίζεται στη $g(x) = x^3 + 2\cdot x + 2$.

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο Μ(β,α).

Γ4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_g κάθετη στην $y = 4\cdot x + 1926$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω δύο συναρτήσεις $f,\ g$ με:

- $f(x) = x^4 - x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x - 2016$
- $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x - 2015$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι $C_f,\ C_g$ έχουν δύο κοινές εφαπτομένες.

Δ2. Αν $\varphi(x) = f'(x) - g'(x)$, να μελετήσετε την φ(x) ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_φ στα σημεία που εμφανίζει ακρότατα.

Δ4. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_φ οι οποίες είναι παράλληλες στην $y = (f(0) - g(0) - 3)\,x - 1999$.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΤΙΜΑ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΔΥΟ (2) ΩΡΕΣ