

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-2x+\alpha$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(1,5)$

A)Αποδείξτε ότι $\alpha=5$

B)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ)Αποδείξτε ότι : $4 \leq f(x) \leq 5 \quad \forall x \in [\frac{2}{3}, 1]$

Δ)Βρείτε την εφαπτομένη της γ.π της f στο σημείο A .

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2-6x+8$$

A)Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{4-x^2}$ B) Να

μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

Γ)Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1=f(\alpha)$ με $v_1=2$, $x_2=f(2)$ με $v_2=5$ και $x_3=f(3)$ με $v_3=3$. Αν το εύρος των παραπάνω τιμών είναι 4 τότε:

i)δείξτε ότι $\alpha=1$ και ii)βρείτε \bar{x}

ΑΣΚΗΣΗ 3

A)Υπολογίστε το

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ και το } \mu = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{1-x}$$

B))Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+\mu x+\lambda \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Γ)Υπολογίστε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1006+h)-f(1006)}{h}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=x^2-$

$6x+\lambda$ για την οποία ισχύει

$$f(-1)+f'(1)+f''(2016)=0$$

A)Να βρείτε την τιμή του λ

B)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Γ)Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(-2015)$, $f(-2016)$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2+x-2$$

A)Να βρείτε το όριο $\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3-1}$

B)Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία ακρότατα

Γ)Βρείτε την εφαπτομένη της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi=7x-3$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^3+x^2+\alpha, \text{ όπου } \alpha \text{ η τιμή του ορίου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x^2-4}$$

A)Δείξτε ότι $\alpha=3/4$

B) Βρείτε τα ακρότατα της f . Γ)Βρείτε την εφαπτομένη της γ.π της συνάρτησης που είναι κάθετη στην ευθεία $\psi=-x+4$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta \text{ η οποία για } x=2$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και η γ.π της διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

A)Να βρείτε τις τιμές των α, β

B)Για $\alpha=6, \beta=1$ i)Μελετήστε τη μονοτονία της f ii)Βρείτε τα ακρότατα της f

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3+\alpha x^2-9x+\beta \text{ για την οποία}$$

ισχύουν $f(2)=5$ και $f'(2)=15$

A)Αποδείξτε ότι $\alpha=\beta=3$ B)Βρείτε το

συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(-2, f(-2))$

Γ)Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)+9}{x^3+8}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \frac{x^2-1}{x-1}, & x > 1 \\ x^2+3x+1, & x \leq 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

A) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

B) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Γ) Αν η f είναι συνεχής στο 1 βρείτε το α

Δ) Για την τιμή του α που βρήκατε

υπολογίστε την παράσταση

$$\Pi = f(2) + f'(-1) + f''(2015)$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 6x + \sqrt{2}$

A) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της

B) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η

εφαπτομένη της f στο σημείο $A\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$

με τον άξονα xx' .

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \kappa - 11$

με $\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 9}{x - 1}$

A) Δείξτε ότι $\kappa = 14$ B) Βρείτε το

ρυθμό μεταβολής της f για $x = 2$

Γ) Βρείτε τα σημεία τομής της γ π της f με τους άξονες.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι 16, 14, 22, 18, 20 + α με $\alpha > 0$. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = 0,2$ και η τυπική απόκλιση s είναι ίση

με το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)^2 - 16}{2x - 2}$

A) Αποδείξτε ότι $s = 4$

B) Υπολογίστε τον αριθμό α

Γ) Για $\alpha = 10$ βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 16} + \alpha, & x \neq 3 \\ \beta, & x = 3 \end{cases} \text{ της οποίας η}$$

γραφική παράσταση τέμνει τον ψ' ψ στο $1/3$. A) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$

B) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Γ) Να βρείτε τον αριθμό β .

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7 \text{ για την οποία}$$

ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, x \in \mathbb{R}$ A)

Αποδείξτε ότι $\alpha = 9$ B) Υπολογίστε το όριο

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$ Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της f

που είναι // στην $\psi = -3x$.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - 3}{x^2 - 1}$. Η

εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$A(2, f(2))$ είναι // στην ευθεία

$\psi = 2x + 3$. A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού

της f B) Αποδείξτε ότι $\alpha = -2$ Γ) Βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ Δ) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x + 5 \text{ διέρχεται από το σημείο}$$

$A(-2, -7)$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = 1$

.A) Αποδείξτε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -10$

B) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{\sqrt{x} + 3 - 2}$. Γ) Δείξτε

ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη -1 σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα xx' .

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ένα σώμα κινείται πάνω σε ευθύγραμμο άξονα και η θέση του κάθε χρονική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

στιγμή $t(\text{sec})$ δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^3-6t^2+9t+5$ με $t \in [0,5]$. Να βρείτε:
 Α) Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=2 \text{ sec}$ Β) Την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή $t=4 \text{ sec}$ Γ) Ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι ακίνητο; Δ) Ποια χρονικά διαστήματα το σώμα κινείται προς τη θετική και ποια στην αρνητική κατεύθυνση Ε) το συνολικό διάστημα που διένυσε το σώμα .

ΑΣΚΗΣΗ 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$

Γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2 f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \alpha^2 - 4\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπ.ελάχιστο.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α , για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 5x + 6}$

α. Να βρεθεί το π.ο. της $f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

β. Αν $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 3 \\ a+1, & x = 3 \end{cases}$ να βρεθεί το

πεδίο ορισμού της $g(x)$. Ποια η τιμή του a ώστε $g(x)$ συνεχής

γ. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1814,$$

η οποία έχει τοπικά ακρότατα για $x=1$ και $x=-2$.

Α. Να βρείτε:

- i) την παράγωγο της f .
- ii) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Β. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της C_f που είναι // στον $\chi\chi'$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + 6$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(-1,14)$.

Α) Να δείξετε ότι $\lambda = 7$

Β) Για την τιμή $\lambda = 7$ i) Βρείτε τα σημεία που η $\gamma. \pi$ της f τέμνει τους άξονες. ii) Να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{1-x^2}$

iii) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ a+2, & x = 1 \end{cases}$

Να βρεθεί για ποια τιμή του a η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$

Α) Να βρείτε την $f'(x)$

Β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+1} - 2}$

Γ) Βρείτε τα σημεία της $\gamma. \pi$ της συνάρτησης στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $\chi\chi'$

Δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση .

ΑΣΚΗΣΗ 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

α. Βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

β. Από τυχαίο σημείο $M(x, \psi)$ της γ.π της f φέρνουμε παράλληλες στους άξονες x', x'' , ψ', ψ'' οι οποίες σχηματίζουν με τους ημίάξονες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Βρείτε το σημείο M ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου να είναι ελάχιστη.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Το κόστος παραγωγής μιας συσκευής και η τιμή πώλησής της δίνονται, συναρτήσσει του χρόνου t (σε ώρες) που απαιτείται για την κατασκευή της, από τους τύπους:

$$K(t) = 10t^2 \text{ και } E(t) = 1000 - \frac{20\alpha^3}{t}, \text{ σε ΕΥΡΩ}$$

όπου α σταθερός αριθμός.

A) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους που προκύπτει από την πώληση μιας συσκευής.

B) Αν το κέρδος γίνεται μέγιστο όταν για την κατασκευή της συσκευής απαιτούνται 2 ώρες να βρείτε την τιμή του α .

Γ) Βρείτε το $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{E(t) - E(1)}{K(t) - K(1)}$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{ και}$$

$$g(x) = x^2 + x + 2 \text{ και το σημείο } A(1, y_0)$$

που είναι κοινό σημείο των C_f και C_g . Αν

οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη

στο $A(1, y_0)$ να βρείτε: A) τις τιμές των a, β

B) την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης

και Γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{g(x)} - 2}$

ΑΣΚΗΣΗ 27

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + ax^2 - x + 2010 \text{ με } a \in \mathbb{R}. \text{ A) Να}$$

βρείτε τον αριθμό a αν οι συναρτήσεις

f, f' έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής όταν

$x=3$. B) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2008}{1 - \sqrt{x}}$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. A) Να

βρείτε το πεδίο ορισμού της. B) Να

αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f

ως προς x , όταν $x=3$ είναι $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Γ)

Θεωρούμε την $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$, $x \neq 2$, να

υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Έστω x, ψ οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με εμβαδό 100 m^2 .

A) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x}, x > 0$$

B) Ποιο από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100 m^2 έχει τη μικρότερη περίμετρο;

Γ) Βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(200+h) - 401}{h}$

ΑΣΚΗΣΗ 30

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος

τετραγώνου πλευράς 60 cm , θα

κατασκευαστεί δοχείο ανοιχτό από

πάνω. Για το σκοπό αυτό κόβουμε από τις

γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα

πλευράς x και στη συνέχεια διπλώνουμε

προς τα πάνω τις πλευρές που

απομένουν. A) Αποδείξτε ότι ο όγκος του

δοχείου που θα κατασκευαστεί δίνεται

από τη σχέση $V(x) = x(60 - 2x)^2$, $0 < x < 30$

B) Να βρείτε για ποια τιμή του x το δοχείο έχει μέγιστο όγκο.

ΑΣΚΗΣΗ 31

Για την παραγωγή x μηχανικών

εξαρτημάτων υπολογίστηκε ότι το

εβδομαδιαίο κόστος είναι:

$$K(x) = \frac{x^2}{4} + 25x + 25 \text{ ευρώ. Η τιμή πώλησης}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

κάθε εξαρτήματος είναι $1000 - \frac{1}{2}x$ ευρώ

α) Να εκφράσετε το κέρδος $P(x)$ από την πώληση x εξαρτημάτων σε μια εβδομάδα σε συνάρτηση με το x .

β) Πόσα εξαρτήματα πρέπει να παράγει την εβδομάδα για να έχει το μέγιστο κέρδος;

γ) Είναι ποιο συμφέρον να παραχθούν και να πωληθούν 350 ή 500 εξαρτήματα;

ΑΣΚΗΣΗ 32

Ένα χελιδόνη πετάει και το ύψος του h (σε m), από το έδαφος, δίνεται από τη συνάρτηση: $h(t) = 3t^2 - 6t + 5, 0 \leq t \leq 5$. Να βρείτε: α) Το ύψος στο οποίο βρίσκεται το χελιδόνη όταν $t=0$ β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h , ως προς t , όταν $t=2$ γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι το ύψος αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2x^2, g(x) = \frac{16}{x} \text{ και το σημείο}$$

$$B(0, -\alpha(\alpha+3)^2), \alpha < 0$$

Α) Βρείτε το σημείο τομής A των γραφικών παραστάσεων των f, g .

Β) Να εκφράσετε το εμβαδό E του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του α .

Γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς α

Δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B , ώστε ο ρυθμός μεταβολής του E να είναι μέγιστος.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + 2x - 7$ για

$$\text{την οποία ισχύει } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h} = -18$$

Α) Δείξτε ότι $\alpha = 5$

Β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γ .π της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -2$

$$\Gamma) \text{Βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{f(x) - f(2)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 35

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x + \frac{1}{x^3}, g(x) = \frac{2}{x}. \text{ Α) Να βρείτε τα}$$

πεδία ορισμού τους Β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων Γ) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

$$\Delta) \text{Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 3}{1-x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

$$\text{και } g(x) = \sqrt{x-1} + 3$$

Α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

Β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - 1}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

Γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2g(x) - 4x}{8 - x^3} \right)$$

Δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3) - 2g(5) + f(0)$

ΑΣΚΗΣΗ 37

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2016 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

Α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 2016$ όταν $x \in (-\infty, 1]$

Γ) Να αποδείξετε ότι $f(2008) < f(2009)$

Δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-e)$ και $f(-\pi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

ΑΣΚΗΣΗ 38

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου, ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες δίνεται από την σχέση

$$\theta(t) = -t^3 + 9t^2 - 10t + c, 0 \leq t \leq 8$$

Α) Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς c , αν γνωρίζετε ότι την χρονική στιγμή $t=0$ η θερμοκρασία ήταν $16C^0$

Β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο τέλος της τέταρτης ώρας

Γ) Να βρείτε την ώρα με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 100x$.

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Οι αποστάσεις (σε km) των 26 κοινοτήτων ενός νομού από το πλησιέστερο νοσοκομείο είναι:

5	1	8	8	1	4	2	1	0	1	5	1	9
	0			3			0		6		5	
6	4	7	5	4	6	7	7	5	8	1	3	9
										0		

α) Να κατασκευάσετε πίνακα: i) Συχνοτήτων ii) Αθροιστικών συχνοτήτων των αποστάσεων.

β) Πόσες κοινότητες απέχουν από το νοσοκομείο περισσότερο από 10 km;

ΑΣΚΗΣΗ 41

Η μέση τιμή της κατανομής του παρακάτω πίνακα είναι $\bar{X} = 3$

X_i	V_i
1	3
2	5
3	9
4	K
5	1
6	1
Σύνολα	

Α) Να υπολογίσετε τον αριθμό K.

Β). Για $K=6$ να ξαναγραφεί Ο πίνακας και να συμπληρωθεί με στήλες εκατοστιαίας σχετικής συχνότητας και αθροιστικής συχνότητας.

Γ) Για $K=6$ να υπολογίσετε την διακύμανση.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) - g(x) = x^2 + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Α) Αποδείξτε ότι $f'(x) = g'(x) + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$

Β) Αν η εφαπτομένη της g στο σημείο $A(1,3)$ είναι // στην ευθεία $\psi = x + 2016$ βρείτε την εφαπτομένη της f στο $B(1, f(1))$

ΑΣΚΗΣΗ 43

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Α) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x .

Β) Βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής γίνεται θετικός

Γ) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{1 - \sqrt{x}}$

ΑΣΚΗΣΗ 44

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 5x - \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία

Β) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της f σε κάθε σημείο σχηματίζει με τον x' οξεία γωνία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

Γ)Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)+1}{\sqrt{x+1}-1}$

ΑΣΚΗΣΗ 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Α)Βρείτε μονοτονία και ακρότατα της f

Β)Δείξτε ότι $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Γ)Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$f(2015), f(2016)$

Δ)Αποδείξτε ότι

$$xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) + \frac{2016}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=3x^2, g(x)=x^2-x$.

Α)Να ορίσετε την συνάρτηση $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Β)Δείξτε $\left[\lim_{x \rightarrow 2} \phi(x) \right]^2 - 2016 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 36$

Γ)Βρείτε την εφαπτομένη της g στο σημείο $(0, g(0))$.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Επιστημονικές μελέτες έδειξαν ότι ο δείκτης πνευματικής διαύγειας του ανθρώπου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη

σχέση $\Delta(x) = \frac{4x}{10^4} \cdot (100 - x)$ όπου x η

ηλικία σε έτη και τιμές στο διάστημα $[0, 80]$

Α)Βρείτε το δείκτη διαύγειας ενός δεκάχρονου παιδιού.

Β)Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του δείκτη διαύγειας.

Γ)Εξετάστε πως μεταβάλλονται οι τιμές του δείκτη μέσα στο διάστημα 80 ετών.

Δ)Σε ποια ηλικία ο άνθρωπος έχει τη μέγιστη διαύγεια?

Ε)Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{10^4 \cdot \Delta(x) - 6400}{x^3 - 8000}$.

ΑΣΚΗΣΗ 48

Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής χ μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση

$$K(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - 20\chi^2 + 600\chi + 1000 \text{ σε ΕΥΡΩ}$$

με $6 \leq \chi \leq 50$. Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420 - 2\chi$ ΕΥΡΩ.

Α)Να βρείτε τη συνάρτηση f που δίνει το κέρδος από την πώληση χ μονάδων του προϊόντος

Β)Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή χ του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 49

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$\text{με } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Α)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Β)Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = [f(0) - f(1)][f(-2) - f(-3)]$$

Γ)Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f.

ΑΣΚΗΣΗ 50

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία για $\chi = -1$ έχει τοπικό ακρότατο το -2

Α)Να βρείτε $f'(-1), f(-1)$

Β)Βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο με τετμημένη -1

Β) Αν $g(x) = xf(x) + x^2 - x + 2$ βρείτε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h-1) - g(-1)}{h}$$

ΑΣΚΗΣΗ 51

Ένα κινητό κινείται σε ευθύγραμμο άξονα και η θέση του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + 1, f \text{ σε m, } t \text{ σε sec.}$$

Α)Να βρεθεί η αρχική του θέση.

Β)Να βρεθεί η ταχύτητα του τη χρονική στιγμή $t=1\text{sec}$

Γ)Πότε είναι στιγμιαία ακίνητο;

Δ)Πότε κινείται προς τη θετική και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

Ε)Βρείτε το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει στα 4 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του.

ΑΣΚΗΣΗ 52

Η συνάρτηση θέσης ενός κινητού που κινείται σε ευθύγραμμο άξονα είναι $x(t)=t^3+3t^2+9t+1$, x σε m, t σε sec.

α)Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του όταν $t=2$ sec.

β)Δείξτε ότι κινείται πάντα προς τη θετική κατεύθυνση.

γ)Βρείτε το όριο $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{x(t)-x'(t)}{x''(t)}$

ΑΣΚΗΣΗ 53

Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός N των φαλαινών εκτιμάται ότι θα μεταβάλλεται με το χρόνο t (μήνες) σύμφωνα με τη συνάρτηση $N(t)=3t^3+2t^2-10t+600$, $0 \leq t \leq 10$

Α)Να βρεθεί ο αριθμός των φαλαινών τη στιγμή που άρχισαν να εφαρμόζονται τα μέτρα.

Β)Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του αριθμού των φαλαινών μισό χρόνο μετά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων.

Γ)Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το 2^ο έτος.

Δ)Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα έτη;

ΑΣΚΗΣΗ 54

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό της

επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x)=\frac{1}{2}x(50-x), \quad 0 < x < 50.$$

β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 55

Στην Εγνατία οδό εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες αυτοκίνητα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά δίνεται στον πίνακα:

κλάσεις	χ_i	v_i	f%	N_i	F%
[5,15)		60			
[15,25)					68%
[25,35)				180	
[35,45)					
Σύνολο		200			

Α)Να συμπληρωθεί ο πίνακας

Β)Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

Γ)Να βρείτε τη μέση τιμή

Δ)Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 km.

ΑΣΚΗΣΗ 56

Σε δείγμα μεγέθους $n=24$ και διαμέσου 3,5 αντιστοιχεί ο επόμενος πίνακας κατανομής συχνοτήτων:

x_i	1	2	3	4	5
v_i	α	6	4	β	7

Α)Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=5$

Β)Εξετάστε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

$$\left(\text{Δίνεται ότι } \frac{81}{24} \approx 3,4 \text{ και } \sqrt{1,64} \approx 1,2\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 57

Δίνεται το επόμενο δείγμα παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X :

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

$X, x+w, x+2w, x+3w, x+4w, w>0$ το οποίο έχει τυπική απόκλιση $3\sqrt{2}$ και μέση τιμή 8.

A) Υπολογίστε τα x, w

B) Αν οι παραπάνω τιμές έχουν συντελεστές βαρύτητας

1, 1, 2, 2, υπολογίστε το σταθμικό μέσο όρο τους.

ΑΣΚΗΣΗ 58

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$. Η μέση τιμή των αριθμών $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ είναι 5.

A) Να βρείτε τον αριθμό α

Για $\alpha = 1$

B) Υπολογίστε τη διακύμανση του παραπάνω δείγματος.

Γ) Βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \lambda^2 + 4\lambda, & x = 2 \end{cases} \text{ είναι συνεχής.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 59

Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων της καλοκαιρινής εργασίας μιας ομάδας φοιτητών, όπου x_i οι ώρες εργασίας:

X_i	1	2	3	4	5
v_i	α	5	β	2	1

Όπου α, β είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1, x \in \mathbb{R}$

A) Δείξτε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 3$

B) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο

Γ) Πόσοι φοιτητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες?

ΑΣΚΗΣΗ 60

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5 \cdot s \cdot x^2 + 2 \cdot \bar{X} \cdot x + 43, x \in \mathbb{R} \text{ όπου } \bar{X}, s$$

η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους n . Αν η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με

τετμημένη -2 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

A) Δείξτε ότι το δείγμα είναι οριακά ομοιογενές.

B) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ) Αν το ελάχιστο της f είναι 3 βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

ΑΣΚΗΣΗ 61

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών ακολουθεί κανονική κατανομή

- Το 50% των ατόμων έχουν βάρος 65 κιλά το πολύ.
- Το 47,5% των μαθητών έχουν βάρος από 65 έως 75 κιλά.

A) Υπολογίστε μέση τιμή, τυπική απόκλιση, διάμεσο και εύρος.

B) Εξετάστε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Γ) Υπολογίστε το ποσοστό των μαθητών με βάρος από 55 έως 70 κιλά.

Δ) Εάν από 55 έως 60 κιλά βάρος έχουν 27 μαθητές υπολογίστε το μέγεθος του δείγματος.

ΑΣΚΗΣΗ 62

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + \lambda, x \geq 0 \text{ και ισχύει:}$$

- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $P(1, 14)$
- Η εφαιπτομένη της γ.π της f στο σημείο με τετμημένη 1 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

A) Να βρείτε την $f'(x)$

B) Αποδείξτε ότι $k=2$ και $\lambda=10$

Για $k=2$ και $\lambda=10$

Γ) Μια μεταβλητή x ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $f(1)$ και τυπική

$$\text{απόκλιση } s = \frac{-2 \cdot f'(4)}{13}. \text{ Τρεις}$$

παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους n είναι μικρότερες ή ίσες του 8

i) Βρείτε το μέγεθος του δείγματος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΕΠΑΛ

ii)Εξετάστε ως προς την ομοιογένεια το δείγμα.

ΑΣΚΗΣΗ 63

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 μέτρων μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές γιατί η τέταρτη είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου είναι x m

A)Αποδείξτε ότι το εμβαδό της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2, 0 < x < 200$$

B)Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που μπορούμε να περιφράξουμε.

Γ)Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100), f'(101), f'(102), f'(103), f'(104)$

Δ) Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των $f'(100), f'(101), f'(102), f'(103), f'(104)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε όλους τους αριθμούς κατά $c, c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c έτσι ώστε $CV' = 2CV$.